

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

VANDERLEI GALINA

**SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO EM BACIAS HIDROGRÁFICAS
UTILIZANDO O MÉTODO DO RETICULADO DE BOLTZMANN**

CURITIBA

2017

VANDERLEI GALINA

**SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO EM BACIAS HIDROGRÁFICAS
UTILIZANDO O MÉTODO DO RETICULADO DE BOLTZMANN**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Métodos Numéricos em Engenharia na área
de concentração em Programação Matemática,
setores de Tecnologia e Ciências Exatas da Uni-
versidade Federal do Paraná, como requisito par-
cial a obtenção do grau de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. Eloy Kaviski

Coorientadores:

Profa. Dra. Liliana Madalena Gramani

Prof. Dr. Adilandri Mércio Lobeiro

CURITIBA

2017

G158s

Galina, Vanderlei

Simulação do escoamento em bacias hidrográficas utilizando o método do reticulado de boltzmann / Vanderlei Galina. – Curitiba, 2017.

140 f. : il. color. ; 30 cm.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2017.

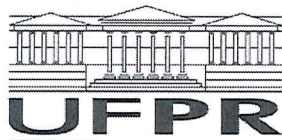
Orientador: Eloy Kaviski.

Coorientadora: Liliana Madalena Gramani.

Coorientador: Adilandri Mércio Lobeiro.

1. Método do reticulado de Boltzmann. 2. Bacias hidrográficas. 3. Escoamento superficial. 4. Modelo onda cinemática. I. Universidade Federal do Paraná. II. Kaviski, Eloy. III. Gramani, Liliana Madalena. IV. Lobeiro, Adilandri Mércio. V. Título.

CDD: 551.483



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MÉTODOS NUMÉRICOS
EM ENGENHARIA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **VANDERLEI GALINA** intitulada: **SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO EM BACIAS HIDROGRÁFICAS UTILIZANDO O MÉTODO DO RETICULADO DE BOLTZMANN**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua Aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 01 de Dezembro de 2017.

ELOY KAVISKI
Presidente da Banca Examinadora

MARCELO RODRIGUES BESSA
Avaliador Externo

WILSON MARQUES JUNIOR
Avaliador Externo

RUDINEI LUIZ BOGO
Avaliador Externo

EUDES JOSÉ ARANTES
Avaliador Externo

AGRADECIMENTOS

A Deus e a Nossa Senhora Medianeira, por estarem sempre comigo e pelas bênçãos concedidas.

À minha esposa Jocelaine, pelo apoio, incentivo, companheirismo e presença certa para discussões e aprendizado. Com quem divido meus sonhos, projetos e conquistas.

À querida Jheniffer, que muito nos ensinou sobre força, alegria e persistência. Mesmo em momentos tão difíceis, nos mostrou a serenidade e humildade de viver. Você não está mais aqui conosco, mas permanecerá nos nossos corações.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Eloy Kaviski e aos meus coorientadores Profa. Dra. Liliana Madalena Gramani e Prof. Dr. Adilandri Mércio Lobeiro pelo acompanhamento e orientação.

Aos professores do PPGMNE pelos ensinamentos e experiência transmitidos.

A todos os colegas e bons amigos que fiz durante os anos de estudo no PPGMNE.

À UTFPR, campus Curitiba e campus Toledo, pelo período de afastamento que tanto colaborou para a realização desta tese.

*“Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa,
nunca tem medo e nunca se arrepende.”*

Leonardo da Vinci

RESUMO

Nesta tese desenvolve-se um esquema de simulação numérica unidimensional do escoamento superficial em bacias hidrográficas, por meio do método do reticulado de Boltzmann (LBM) com operador de colisão BGK (Bhatnagar, Gross e Krook). O LBM recupera as equações do modelo onda cinemática sem realizar a discretização das equações macroscópicas utilizando uma descrição simplificada modelada pela teoria cinética dos gases. Para isto, desenvolveu-se um modelo computacional onde, de acordo com a heterogeneidade, a bacia hidrográfica pode ser subdividida em uma ou várias sub-bacias, em que cada sub-bacia possui uma forma em “V” segmentada em dois planos laterais e um canal principal. A simulação considera a precipitação efetiva que escoar sobre a bacia hidrográfica por unidade de largura na saída de cada um dos planos que representam a superfície da bacia. Em cada sub-bacia, a água que escoar dos planos entra no canal sob a forma de contribuição lateral. Na saída de cada sub-bacia, obtém-se um hidrograma, que será utilizado para ajustar as condições de contorno na junção de dois segmentos de canal. Quando o escoamento superficial em todas as sub-bacias for totalmente processado, tem-se o hidrograma total, o qual fornece a variação da vazão em relação ao tempo correspondente a resposta da bacia hidrográfica a precipitação efetiva no evento simulado. São utilizadas duas funções de distribuição de equilíbrio desenvolvidas por meio da expansão de Chapman-Enskog, uma adequada para o escoamento na superfície da bacia e outra para o canal principal, visando obter as variáveis de interesse em cada caso. Várias simulações foram realizadas em escoamentos governados pelas equações de águas rasas com reticulado D2Q9, e escoamentos descritos pelo modelo onda cinemática com os reticulados D1Q3 e D1Q5. Os resultados numéricos foram comparados com o modelo hidrológico KINEROS2 e com dados medidos em campo, e demonstram que o LBM é eficiente na simulação de escoamentos em bacias hidrográficas.

Palavras-chaves: Método do reticulado de Boltzmann. Escoamento em bacias hidrográficas. Escoamento superficial. Modelo onda cinemática.

ABSTRACT

In this thesis, a one-dimensional numerical simulation scheme of the surface runoff in river basins was developed by means of the lattice Boltzmann method (LBM) with the BGK collision operator (Bhatnagar, Gross e Krook). The LBM can recover the equations of the kinematic wave model without performing the discretization of the macroscopic equations using a simplified description modeled by the kinetic theory of gases. A computational model was developed for this purpose, in which, according to heterogeneity, the river basins can be subdivided into one or several sub-basins, in which each sub-basin is “V” shaped and segmented into two lateral planes and a main channel. The simulation considers the effective precipitation that flows over the river basin per unit of width at the exit from each of the planes that represent the basin surface. In each sub-basin the water that flows from the planes enters the channel in the form of a lateral contribution. At the exit of each sub-basin there is a hydrograph that will be used to adjust the boundary conditions at the junction of two channel segments. When the surface runoff in all sub-basins is fully processed, there is a total hydrograph, which supplies the variation of flow in relation to the time corresponding to the response of the river basin to effective precipitation in the simulated event. Two equilibrium distribution functions developed by means of the Chapman Enskog expansion were used, one appropriate for surface runoff in the basin, and the other for the main channel, aiming to obtain the variable of interest in each case. Several simulations were carried out in flows governed by the shallow water equations with D2Q9 lattice, and the flows described by the kinematic wave model with the D1Q3 and D1Q5 lattices. The numerical results were compared with the KINEROS2 hydrological model and with data measured in the field, and demonstrate that the LBM is efficient in the simulation of flows in watersheds.

Key-words: Lattice Boltzmann method. Runoff in watersheds. Overland flow. Kinematic wave model.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Vista plana de uma típica bacia hidrográfica	24
Figura 2 – Escoamento superficial em dois planos	25
Figura 3 – Regra 150	43
Figura 4 – Evolução da Regra 150	43
Figura 5 – Diagramas espaço-tempo para cada classe de Wolfram	44
Figura 6 – Jogo da Vida - Configuração inicial de células	45
Figura 7 – Jogo da Vida - Geração 100	45
Figura 8 – Jogo da Vida - Geração 500	46
Figura 9 – Direções de movimento no reticulado do HPP	48
Figura 10 – Exemplo de configuração de partículas no modelo HPP	48
Figura 11 – A regra HPP: (a) Propagação, (b) e (c) Colisão	49
Figura 12 – Colisão e propagação no modelo FHP	49
Figura 13 – Direções de movimento no reticulado do FHP	50
Figura 14 – Colisão de duas partículas no modelo FHP	51
Figura 15 – Modelo de reticulado D2Q9 em uma malha retangular	60
Figura 16 – Modelo de reticulado D1Q3	72
Figura 17 – Modelo de reticulado D1Q5	78
Figura 18 – Malha computacional	87
Figura 19 – Junção de canais das sub-bacias	89
Figura 20 – Funções de distribuição desconhecidas nas paredes de um canal	90
Figura 21 – Funções de distribuição desconhecidas na entrada e saída do canal.	91
Figura 22 – Funções de distribuição desconhecidas nos vértices da malha.	95
Figura 23 – Esquema para simulação do fluxo de maré	99
Figura 24 – Superfície da água em 10937,5 s	101
Figura 25 – Velocidade do escoamento em 10937,5 s	102
Figura 26 – Escoamento ao redor de um cilindro - Perfil da profundidade da água	103
Figura 27 – Escoamento ao redor de um cilindro - Profundidade da água	104
Figura 28 – Escoamento ao redor de um cilindro - Velocidade da água na direção x	104
Figura 29 – Bacia hidrográfica natural	105
Figura 30 – Segmentação da bacia	106
Figura 31 – Representação da bacia conforme KINEROS2	108
Figura 32 – Hidrograma do evento 1	108
Figura 33 – Hidrograma do evento 2	109
Figura 34 – Bacia do rio Aquidauana	110
Figura 35 – Segmentação em 4 sub-bacias - bacia do rio Aquidauana	111
Figura 36 – Segmentação em 11 sub-bacias - bacia do rio Aquidauana	112

Figura 37 – Hidrogramas das sub-bacias - 4 segmentações	114
Figura 38 – Comparação entre LBM e KINEROS2 - 4 sub-bacias do rio Aquidauana.	115
Figura 39 – Hidrogramas das sub-bacias - 11 segmentações do rio Aquidauana. . . .	115
Figura 40 – Comparação entre LBM e KINEROS2 - 11 sub-bacias do rio Aquidauana.	115
Figura 41 – Localização da bacia hidrográfica do rio Iguaçu	117
Figura 42 – Mapa hidrográfico do Estado do Paraná	118
Figura 43 – Localização de estações da bacia hidrográfica do rio Iguaçu	119
Figura 44 – Bacia hidrográfica do rio Chopim	119
Figura 45 – Hidrograma na sub-bacia 5 - Estação Salto Claudelino	122
Figura 46 – Hidrograma na sub-bacia 9 - Estação Porto Palmeirinha	122
Figura 47 – Dispersão das vazões observadas e simuladas na sub-bacia 5 - Estação Salto Claudelino	124
Figura 48 – Dispersão das vazões observadas e simuladas na sub-bacia 9 - Estação Porto Palmeirinha	124

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Elevação do leito	100
Tabela 2 – Características físicas da bacia	106
Tabela 3 – Excesso de intensidade de chuvas	106
Tabela 4 – Parâmetros da simulação no LBM	107
Tabela 5 – Comparativo LBM × KINEROS2	108
Tabela 6 – Caracterização física dos planos das 4 sub-bacias do rio Aquidauana . .	112
Tabela 7 – Caracterização física dos canais das 4 sub-bacias do rio Aquidauana . .	113
Tabela 8 – Caracterização física dos planos das 11 sub-bacias do rio Aquidauana .	113
Tabela 9 – Caracterização física dos canais das 11 sub-bacias do rio Aquidauana .	114
Tabela 10 – Comparativo LBM × KINEROS2	114
Tabela 11 – Estações hidrométricas no rio Chopim	118
Tabela 12 – Caracterização física dos planos das 9 sub-bacias do rio Chopim	120
Tabela 13 – Caracterização física dos canais das 9 sub-bacias do rio Chopim	120
Tabela 14 – Classificação do coeficiente linear de Pearson	123
Tabela 15 – Teste t de Student para a sub-bacia 5 - Salto Claudelino	124
Tabela 16 – Teste t de Student para a sub-bacia 9 - Porto Palmeirinha	125
Tabela 17 – Intensidade média de precipitação no rio Chopim, mês 07/1987	140
Tabela 18 – Vazões iniciais e coeficientes de interpolação da vazão nos trechos de canais do rio Chopim, mês 07/1987	140

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BGK	Denominação do operador de colisão desenvolvido por Bhatnagar, Gross e Krook
CA	Autômato Celular (<i>Cellular Automata</i>)
D1Q3	Modelo de reticulado unidimensional do Método do Reticulado de Boltzmann
D1Q5	Modelo de reticulado unidimensional do Método do Reticulado de Boltzmann
D2Q5	Modelo de reticulado bidimensional do Método do Reticulado de Boltzmann
D2Q7	Modelo de reticulado bidimensional do Método do Reticulado de Boltzmann
D2Q9	Modelo de reticulado bidimensional do Método do Reticulado de Boltzmann
FHP	Modelo de Autômato Celular do tipo Gás em Rede desenvolvido por Frisch, Hasslacher e Pomeau
HPP	Modelo de Autômato Celular do tipo Gás em Rede desenvolvido por Hardy, Pazziz e Pomeau
KINEROS2	Modelo Cinemático de Escoamento e Erosão (<i>Kinematic Runoff and Erosion Model</i>)
LBE	Equação do Reticulado de Boltzmann (<i>Lattice Boltzmann Equation</i>)
LBE-BGK	Equação do Reticulado de Boltzmann com operador de colisão BGK
LBE-MRT	Equação do Reticulado de Boltzmann com Múltiplos Tempos de Relaxamento
LBM	Método do Reticulado de Boltzmann (<i>Lattice Boltzmann Method</i>)
LBM-BGK	Método do Reticulado de Boltzmann com Operador de Colisão BGK
LBM-MRT	Método do Reticulado de Boltzmann com Múltiplos Tempos de relaxamento
LGCA	Autômato Celular do tipo Gás em Rede (<i>Lattice Gas Cellular Automata</i>)

LES	Simulação em Grandes Escalas (<i>Large Eddy Simulation</i>)
MRT	Múltiplos Tempos de relaxamento (<i>Multiple Relaxation Time</i>)
TRT	Dois Tempos de Relaxamento (<i>Two Relaxation Times</i>)
USDA	Departamento de Agricultura dos Estados Unidos (<i>United States Department of Agriculture</i>)

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área da seção transversal do escoamento
b	Largura
c	Celeridade
C_b	Coefficiente de atrito com o leito do canal
C_r	Coefficiente de resistência
C_s	Constante de Smagorinsky
C_z	Coefficiente de Chezy
D_α	Indicador de colisão no LGCA
e	Velocidade das partículas no reticulado
\hat{e}	Modo de energia
E_i	Termo de Coriolis na direção i
\vec{e}_α	Vetor velocidade das partículas no reticulado na direção α
f_α^{eq}	Função distribuição de equilíbrio nas direções do reticulado
f_α^C	Função distribuição de partículas após colisão
\bar{f}	Função distribuição de partículas antes da propagação
$\bar{\bar{f}}$	Função distribuição de partículas depois da propagação
F	Força externa unidimensional
F_i	Força externa na LBE das equações de águas rasas na direção i
F_r	Número de Froude
g	Força da gravidade
g_α	Força externa na LBE do modelo onda cinemática
h	Profundidade do escoamento
$\hat{\rho}$	Modo de densidade
\hat{j}_x	Componente x do fluxo de massa

\hat{j}_y	Componente y do fluxo de massa
L	Comprimento
l	Número de direções do reticulado
\mathbf{M}	Matriz transformação de um vetor do espaço de velocidades para o espaço dos momentos.
m, m_c, m_s	Coeficientes determinados pelas características do escoamento
m_α	Funções de distribuição de partículas no espaço dos momentos nas direções do reticulado
m_α^{eq}	Funções de distribuição de equilíbrio no espaço dos momentos nas direções do reticulado
N_α	Constante estabelecida de acordo com o reticulado escolhido
n_b	Coeficiente de Manning
n_α	Função distribuição de partículas no LGCA
$\langle n_\alpha \rangle$ ou N_α	Média amostral das variáveis microscópicas de ocupação
p	Pressão
P	Perímetro molhado
$p_i(\tau)$	Polinômios em relação ao parâmetro de relaxamento τ
\hat{p}_{xx}	Componente diagonal do tensor de tensões.
\hat{p}_{xy}	Componente fora da diagonal do tensor de tensões.
\hat{q}_x	Componente x do fluxo de energia
\hat{q}_y	Componente y do fluxo de energia
q	Vazão por unidade de largura
q_l	Contribuição lateral
Q	Vazão
Q_c	Vazão calculada
Q_{in}	Vazão constante na entrada do canal
R	Raio hidráulico

s	Variável booleana randômica
\mathbf{S}	Matriz diagonal dos parâmetros de relaxamento
S_o	Declividade do fundo do canal
S_f	Declividade da linha de energia
S_{oi}	Declividade do fundo do canal na direção i
S_{fi}	Declividade da linha de energia na direção i
t	Tempo
t_i	Escalas de tempo
T_α	Ocorrência de colisão entre partículas no LGCA
u	Velocidade do escoamento unidimensional
\vec{u}	Vetor velocidade do escoamento
u_i	Velocidade do escoamento na direção i
u_{si}	Componente da velocidade do vento na direção i
$v(x, t)$	Função que pode representar uma quantidade de interesse no escoamento
v^*	Variável macroscópica na fronteira
\vec{x}	Vetor espacial que fornece a posição dos nós no reticulado
x_j	Componente do vetor posição \vec{x}
Z_α	Força de corpo nas direções do reticulado escolhido
z_b	Elevação do leito
α	Índice para indicar as direções do reticulado
β, β_c, β_s	Coefficientes determinados pelas características do escoamento
$\bar{\alpha}, \bar{\beta}$	Coefficientes determinados pelas características do escoamento
δ_{ij}	Função delta de Kronecker
Δt	Incremento temporal
Δx	Espaçamento da malha computacional
ε	Número de Knudsen

$\hat{\epsilon}$	Quantidade relacionada com o quadrado da energia
γ	Coeficiente de difusão
μ	Viscosidade dinâmica
ν	Viscosidade cinemática
ν_e	Viscosidade cinemática turbulenta
ν_t	Viscosidade cinemática total
ρ	Densidade do fluido
ρ_a	Densidade do ar
τ	Parâmetro de relaxamento no LBM
τ_e	Parâmetro de relaxamento turbulento
τ_t	Parâmetro de relaxamento total
τ_{ij}	Tensões de viscosidade
τ_{bi}	Tensão de cisalhamento com o fundo do canal na direção i
τ_{si}	Tensão de cisalhamento no fundo do canal na direção i
τ_{wi}	Tensão de cisalhamento do vento na superfície da água na direção i
Π_{ij}	Tensor taxa de deformação
Ω_α	Operador de colisão
$\langle \Omega_\alpha \rangle$	Valores médios sobre o termo de colisão
$\partial z_b / \partial x_i$	Declividade do fundo do canal na direção i

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	20
1.1 PROBLEMA DE PESQUISA	23
1.2 OBJETIVOS	26
1.2.1 Objetivo Geral	26
1.2.2 Objetivos Específicos	26
1.3 JUSTIFICATIVA	27
2 PESQUISAS RELACIONADAS	28
3 EQUAÇÕES GOVERNANTES	35
3.1 EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS	35
3.2 ESCOAMENTO SUPERFICIAL E O MODELO ONDA CINEMÁTICA	38
4 AUTÔMATOS CELULARES	42
4.1 AUTÔMATO CELULAR	42
4.2 AUTÔMATO CELULAR DO TIPO GÁS EM REDE	46
5 MÉTODO DO RETICULADO DE BOLTZMANN PARA ÁGUAS RASAS	55
5.1 LBM COM OPERADOR DE COLISÃO BGK	55
5.1.1 Equação do Reticulado de Boltzmann	56
5.1.2 Função Distribuição de Equilíbrio para Águas Rasas e Variáveis Macroscópicas	61
5.1.3 Estabilidade	64
5.1.4 Vantagens do LBM	66
5.2 LBM COM OPERADOR DE COLISÃO MRT	67
5.3 ABORDAGEM DA TURBULÊNCIA NO LBM	69
6 MÉTODO DO RETICULADO DE BOLTZMANN PARA O MODELO ONDA CINEMÁTICA	71
6.1 EQUAÇÃO DO RETICULADO DE BOLTZMANN PARA O MODELO ONDA CINEMÁTICA	71
6.2 MODELO ONDA CINEMÁTICA BASEADO NO RETICULADO D1Q3	72
6.2.1 Expansão Multi-escala	72
6.2.2 Função Distribuição de Equilíbrio para o Modelo Onda Cinemática Baseado no Reticulado D1Q3	73
6.2.3 Estabilidade	77

6.3	MODELO ONDA CINEMÁTICA BASEADO NO RETICULADO D1Q5	77
6.4	Algoritmo proposto	85
7	CONDIÇÕES DE CONTORNO	87
7.1	ABORDAGEM DAS FRONTEIRAS NO ESCOAMENTO SUPERFICIAL . . .	87
7.2	CONDIÇÃO DE ESCORREGAMENTO	90
7.3	CONDIÇÃO DE NÃO-ESCORREGAMENTO	90
7.4	CONDIÇÃO DE ZOU E HE	91
7.4.1	Condição de Vazão Constante na Entrada do Canal	93
7.4.2	Condição de Profundidade Constante na Saída do Canal	94
7.4.3	Tratamento Especial para os Nós nos Vértices da Malha Computacional . . .	95
8	ESTUDOS DE CASO	98
8.1	SIMULAÇÃO DE UMA ONDA NO MAR PRÓXIMO À COSTA	99
8.1.1	Características do Problema	99
8.1.2	Resultados e Discussões	101
8.2	ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO LOCALIZADO NO CENTRO DE UM CANAL	102
8.2.1	Características do Problema	102
8.2.2	Resultados e Discussões	102
8.3	ESCOAMENTO EM BACIA HIDROGRÁFICA I	104
8.3.1	Características do Problema	104
8.3.2	Resultados e Discussões	106
8.4	ESCOAMENTO EM BACIA HIDROGRÁFICA II: RIO AQUIDAUANA . . .	110
8.4.1	Características do Problema	110
8.4.2	Resultados e Discussões	111
8.5	ESCOAMENTO EM BACIA HIDROGRÁFICA III: RIO CHOPIM	116
8.5.1	Características do Problema	116
8.5.2	Resultados e Discussões	118
9	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	126
9.1	CONCLUSÕES	126
9.2	PESQUISAS FUTURAS	127
	Referências	129
	GLOSSÁRIO	136
	APÊNDICE A SUB-ROTINAS DE COLISÃO E PROPAGAÇÃO . .	137

APÊNDICE B	ARTIGOS DESENVOLVIDOS	139
ANEXO A	PRECIPITAÇÃO E VAZÃO INICIAL NA BACIA RIO CHOPIM	140

1 INTRODUÇÃO

A água que provoca o escoamento na superfície terrestre tem origem nos oceanos e a eles retorna, em um ciclo denominado ciclo hidrológico. Complexo em seu funcionamento, o ciclo hidrológico pode ser explicado de forma simples. A água que evapora dos oceanos e lagos terrestres forma nuvens que deslocam-se pela atmosfera. O vapor da água se condensa e se transforma em chuva, neve ou granizo. A chuva chega ao solo formando o escoamento superficial atingindo rios, e dos rios escoam para os oceanos e lagos (GRIBBIN, 2008).

Fenômenos naturais complexos que ocorrem no ciclo hidrológico são estudados pela hidrologia. A precipitação, a evaporação, a infiltração e o escoamento em rios, são processos dependentes de um grande número de fatores. Para a realização de análises, é necessário a aplicação de modelos hidrológicos. Uma bacia hidrográfica é um sistema natural que exige monitoramento no sentido de prever seu comportamento em ações como precipitações extremas, estiagens, entre outros. Modelos hidrológicos e hidráulicos são ferramentas utilizadas para entender e representar o comportamento da bacia hidrográfica. Por causa da heterogeneidade física da bacia um grande número de modelos tem sido desenvolvidos que se diferenciam pelas características estudadas (TUCCI, 1998).

O foco principal desta tese, é a realização de simulações numéricas unidimensionais do escoamento superficial em bacias hidrográficas naturais, que serão realizadas por meio do método do reticulado de Boltzmann (LBM) com operador de colisão BGK. A sigla BGK é devida a Bhatnager, Gross e Krook (BHATNAGAR; GROSS; KROOK, 1954) que primeiro consideraram um termo de colisão com um único tempo de relaxamento (CHOPARD; MASSELOT, 1999). As equações que governam o escoamento em bacias hidrográficas são dadas pelo modelo onda cinemática, as quais são recuperadas pelo LBM.

Além das simulações de problemas governados pelo modelo onda cinemática por meio do método do reticulado de Boltzmann com operador de colisão BGK, também utilizou-se o LBM-BGK e o método do reticulado de Boltzmann com múltiplos tempos de relaxamento (LBM-MRT) na simulação de escoamentos em canais, que são governados pelas equações de águas rasas. O estudo destes problemas foi fundamental para auxiliar no entendimento e validação do modelo desenvolvido.

O escoamento em superfície livre é governado pelas equações de águas rasas. Porém, para sua resolução, elaboradas técnicas numéricas e uma grande quantidade de informações hidráulicas são necessárias. Na busca em reduzir a quantidade de dados necessários e a dificuldade numérica de resolução das equações diferenciais, são empregadas simplificações das equações de águas rasas como o modelo onda cinemática, também denominado modelo hidráulico de propagação de ondas de cheias (PORTO, 2006).

O modelo onda cinemática é aplicado para descrever escoamentos superficiais em bacias hidrográficas e cursos de água naturais com alta declividade. Foco de interesse desta tese, as bacias hidrográficas são um sistema natural que exige monitoramento no sentido de prever seu comportamento em ações como precipitações extremas, cheias, estiagens, entre outros. Com a análise destes eventos, é possível gerenciar os recursos hídricos e energéticos, evitar a degradação do solo, oferecendo assim planejamento adequado para os espaços rurais, urbanos e industriais (GRIBBIN, 2008).

Dos vários escoamentos presentes na natureza, somente problemas muito simplificados possuem solução analítica. Deste modo, não seria possível prever o comportamento desses escoamentos sem a ajuda dos métodos numéricos.

O uso de métodos numéricos em problemas de hidrodinâmica, possibilitam simular o comportamento do escoamento, obtendo resultados suficientemente próximos aos observados. Os fenômenos relacionados ao movimento de fluidos podem ser bastante complexos. Análises teóricas não conseguem descrever esses fenômenos de forma adequada. Além das análises teóricas, pode-se recorrer a métodos experimentais, que permitem compreendê-los melhor. Uma terceira alternativa para solucionar problemas da dinâmica dos fluidos é a simulação numérica. Juntas, as três abordagens se complementam (FORTUNA, 2012).

Nesta tese, escolheu-se o método do reticulado de Boltzmann para obter as simulações numéricas dos escoamentos propostos.

O LBM é um método numérico eficiente e flexível para simular escoamentos, principalmente quando tratam-se de geometrias complexas. O método caracteriza-se por envolver cálculos simples, apresenta características intrínsecas de processamento paralelo, e fácil aplicação de condições de contorno. Originário dos autômatos celulares do tipo gás em rede (LGCA), o método descreve o movimento microscópico de partículas de forma muito simplificada, e no nível macroscópico a resposta é uma descrição média correta do fluido. A velocidade média das partículas se comporta, no tempo e no espaço, como as velocidades do fluxo físico, o que mostra a direta relação entre a representação microscópica discreta e macroscópica contínua. Essa relação é garantida, pois através da equação do LBM recuperam-se as equações de águas rasas (ZHOU, 2002).

A abordagem do LBM é diferenciada quando comparada aos métodos numéricos tradicionais, pois o LBM fornece uma maneira indireta para a solução das equações governantes do escoamento. O LBM não utiliza discretização das equações macroscópicas, o método baseia-se em modelos microscópicos e equações que governam a cinética em um nível mesoscópico. Deve-se considerar no LBM que a dinâmica macroscópica de um fluido é resultado do comportamento coletivo de partículas microscópicas e não se altera com os detalhes subjacentes referentes as interações moleculares do fluido (CHEN; DOOLEN, 1998).

As características do LBM o tornam um método computacional muito promissor em diferentes áreas. Nos últimos anos, o método tem sido estudado por muitos pesquisadores e torna-se uma área de pesquisa de grande potencial na dinâmica de fluidos computacional. Na literatura, encontram-se muitos métodos computacionais para soluções das equações de águas rasas, tais como, método de diferenças finitas, método de volumes finitos e método dos elementos finitos. Esses métodos foram desenvolvidos buscando soluções diretas nas equações macroscópicas, e normalmente algum tratamento especial é necessário para termos convectivos, cálculo da profundidade ou termos fonte como a declividade do leito, atrito com o fundo do canal, tensões do vento ou tensões de cisalhamento do leito. Essa desvantagem não ocorre no LBM. O LBM é uma moderna e recente técnica numérica, que vem sendo pesquisado com o objetivo de ampliar a sua aplicabilidade em problemas de fluxos gerais e produzir simulações com eficiência e precisão (ZHOU, 2004).

O LBM passou por refinamentos e melhorias. Adaptações foram incorporadas permitindo a aplicabilidade do método em diversas áreas de pesquisa, como por exemplo, na modelagem do fluxo sanguíneo (PELLICCIONI; CERROLAZA; HERRERA, 2006; GOLBERT; BLANCO; FEIJÓO, 2012; GOLBERT, 2013), escoamento com distribuição não-hidrostática de pressão (ZHAO et al., 2013), escoamentos em meios porosos (BENZI; SUCCI; VERGASSOLA, 1992; SURMAS, 2010), escoamento de fluidos com transferência de calor no interior de microcanais (ZARITA; HACHEMI, 2014), aplicações nas indústrias aeroespacial e automotiva (SUCCI, 2001; AMARAL, 2015), modelar problemas complexos de advecção-dispersão em águas rasas (LI; HUANG, 2008) e problemas térmicos (PHILIPPI et al., 2006). Acoplamento entre o LBM e outros métodos numéricos também apresentam bons resultados na dinâmica computacional de fluidos (BETTAIBI; KUZNIK; SEDIKI, 2014; ILIO et al., 2017). Escoamentos governados pelas equações de águas rasas também foram abrangidos pelo LBM e as simulações apresentaram bons resultados (ZHOU, 2002; ZHOU, 2004; ZHOU et al., 2010; PENG; ZHOU; BURROWS, 2011; PENG et al., 2013; BUDINSKI, 2014; PENG et al., 2014; ROCCA et al., 2015; LI; HUANG; LI, 2015; PRESTININZI et al., 2016; ZHANG et al., 2016; GALINA et al., 2016; ZHAO; HUANG; LI, 2017; ROSIS, 2017; CARGNELUTTI et al., 2017).

Com relação a simulação de problemas governados pelo modelo onda cinemática em uma superfície plana, destacam-se as pesquisas de Zhang et al. (2014), Zhang, Feng e Yang (2015). O escoamento em bacias hidrográficas, também governado pelo modelo onda cinemática e simulado por meio do LBM-BGK foi abordado nos estudos de Galina et al. (2017).

A estrutura desta tese está organizada em nove capítulos e demais elementos textuais descritos brevemente como segue:

- No capítulo 1, descreve-se o problema de pesquisa, objetivos e justificativa do

problema proposto e o método utilizado;

- No capítulo 2, apresentam-se algumas pesquisas relacionadas com a aplicação do LBM em problemas envolvendo equações de Navier-Stokes, equações de águas rasas, modelo onda cinemática e equação Burgers;
- No capítulo 3, são abordadas as equações governantes de águas rasas e o modelo onda cinemática;
- Reservou-se para o capítulo 4 a teoria relacionada aos autômatos celulares, predecessores do LBM;
- O capítulo 5 apresenta a teoria relacionada ao LBM sob o ponto de vista da recuperação das equações de águas rasas;
- No capítulo 6, determinam-se as equações necessárias para a aplicação do LBM na simulação de escoamentos governados pelo modelo onda cinemática;
- No capítulo 7, são estabelecidas as condições de contorno utilizadas nesta tese;
- Os estudos de caso, resultados e discussões estão descritos no capítulo 8;
- No capítulo 9, tem-se as conclusões e recomendações de pesquisas futuras;
- Referências;
- Glossário;
- No apêndice A apresentam-se as sub-rotinas de colisão e propagação;
- No apêndice B encontram-se as publicações em congressos, simpósios e periódicos, frutos desta tese, e publicações com a colaboração de outros pesquisadores;
- No Anexo A listam-se os dados de precipitação e vazão inicial na bacia do rio Chopim.

1.1 PROBLEMA DE PESQUISA

Pretende-se simular o escoamento superficial em bacia hidrográfica natural utilizando o método do reticulado de Boltzmann com operador de colisão BGK.

No modelo computacional desenvolvido, a superfície da bacia pode ser subdividida em sub-bacias, em que cada sub-bacia é representada por uma forma em “V” segmentada em dois planos laterais e um canal. A simulação considera a precipitação efetiva que escoar sobre a bacia hidrográfica por unidade de largura na saída de cada um dos planos de escoamento que representam a superfície da bacia. Em cada sub-bacia, a água que escoar dos planos entra no canal sob a forma de contribuição lateral. Na saída de cada sub-bacia, tem-se um hidrograma, que será utilizado para ajustar as condições de contorno na entrada

do novo segmento de canal. Quando o escoamento superficial em todas as sub-bacias foi totalmente processado, tem-se o hidrograma total, o qual fornece a variação da vazão em relação ao tempo como resposta da bacia hidrográfica a precipitação efetiva.

Para que essa engrenagem funcione, utilizam-se duas funções de distribuição de equilíbrio desenvolvidas por meio da expansão de Chapman-Enskog em escalas de tempo, uma adequada para o escoamento na superfície da bacia e outra para o canal principal, visando obter as variáveis de interesse em cada caso. As simulações foram realizadas utilizando dois reticulados unidimensionais, com três e cinco velocidades de movimento. Os resultados numéricos obtidos pelo LBM foram comparados com o modelo hidrológico KINEROS2 e com dados observados.

A bacia hidrográfica, ou bacia de drenagem, consiste em uma área bem definida de captação natural da água de precipitação que faz convergir o escoamento até um curso de água. A bacia hidrográfica é composta de um conjunto de superfícies inclinadas e de uma rede de drenagem formada por cursos de água (canais) que convergem resultando em um único leito no seu exutório (TUCCI, 1998).

O escoamento na bacia hidrográfica é dividido em escoamento superficial e escoamento em canal. O escoamento superficial é a parte do ciclo hidrológico no qual a água desloca-se pela superfície da bacia até encontrar um curso de água (Figura 1). Este deslocamento ocorre como resultado da água precipitada que não foi interceptada pela cobertura vegetal e pela parte que não infiltrou no solo. O comportamento do escoamento superficial depende da cobertura da bacia, de sua declividade e do sistema de canais. O sistema de canais escoar a água que chega do escoamento superficial (TUCCI, 1998).

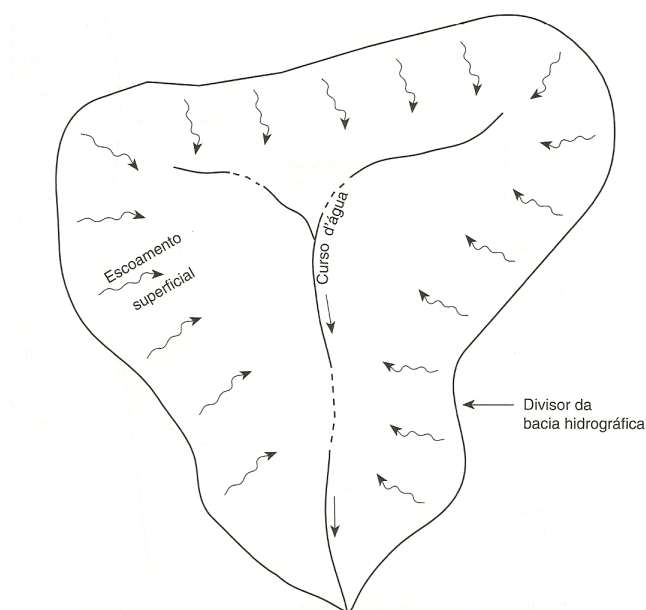


Figura 1 – Vista plana de uma típica bacia hidrográfica

Fonte: Gribbin (2008).

Devido à grande heterogeneidade espacial, nesta tese a superfície da bacia é

representada por planos de escoamento. Esses planos têm grande largura onde ocorre um escoamento de pouca profundidade (escoamento superficial), e são caracterizados por direções predominantes definidas pela declividade da topografia da bacia. A Figura 2 mostra o escoamento superficial em dois planos convergindo para um único canal. A contribuição lateral é dada principalmente pela precipitação que ocorre sobre cada plano (TUCCI, 1998). Dependendo do tamanho e das características da bacia hidrográfica, pode-se representá-la apenas por dois planos e um canal, como mostra a Figura 2, ou então utilizar várias sub-bacias na forma da Figura 2.

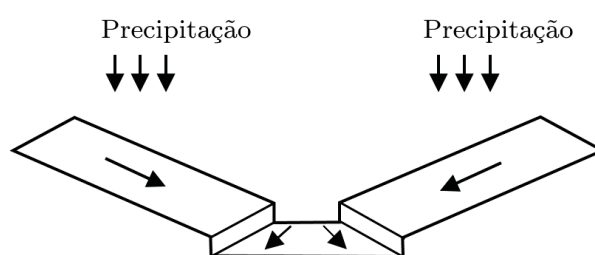


Figura 2 – Escoamento superficial em dois planos

O modelo desenvolvido foi aplicado em três estudos de caso:

- i) Bacia hidrográfica natural com área de $0,834 \text{ km}^2$. O curso de água principal tem comprimento de 1.350 m e subdivide a bacia aproximadamente ao meio. Há outras vias fluviais menores, porém a maior parte do escoamento de captação é formado pelo escoamento superficial que chega até o canal principal. Dessa forma, a bacia é aproximada por uma forma em “V” e segmentada por dois planos de iguais dimensões e um segmento de canal. Os dados referentes a esta bacia hidrográfica são apresentados por Stephenson e Meadows (STEPHENSON; MEADOWNS, 1986);
- ii) Bacia hidrográfica do rio Aquidauana. A bacia tem área de $6.369,09 \text{ km}^2$ e canal principal com extensão de 162,8 km, localizada no rio Aquidauana, acima do município de Palmeiras, a montante do posto pluviométrico e fluviométrico Ponte do Grego, código de identificação 66930000, no estado do Mato Grosso do Sul, Brasil. A bacia foi discretizada em 4 e 11 sub-bacias, onde cada sub-bacia é representada por uma forma em “V” segmentada em dois planos laterais e um segmento de canal;
- iii) Bacia hidrográfica do rio Chopim que está inserida na bacia do rio Iguaçu, Estado do Paraná, Brasil. O trecho do rio Chopim a ser analisado tem comprimento de aproximadamente 281 km com área de drenagem na superfície da bacia em torno de 3.205 km^2 . A simulação é realizada no trecho do rio Chopim entre suas nascentes no município de Palmas, passando pela estação pluviométrica Salto Claudelino até a estação fluviométrica Porto Palmeirinha. Levando-se em conta a delimitação das sub-bacias e os trechos de canais, fez-se a segmentação da bacia do rio Chopim em

nove sub-bacias até a estação Porto Palmeirinha. Cada sub-bacia é composta por um trecho de canal e dois planos laterais de escoamento, com excessão da primeira sub-bacia que é representada por apenas um plano lateral.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Desenvolver um modelo numérico baseado no método do reticulado de Boltzmann com operador de colisão BGK, que tenha a capacidade de representar o escoamento superficial em bacias hidrográficas.

1.2.2 Objetivos Específicos

- i) Desenvolver um modelo numérico, baseado no LBM-BGK, que simule o escoamento em canais, que são governados pelas equações de águas rasas;
- ii) Adaptar o modelo numérico desenvolvido para o escoamento de águas rasas com operador de colisão LBM-MRT e abordagem da turbulência;
- iii) Adaptar o modelo numérico para problemas governados pelo modelo onda cinemática;
- iv) Analisar a necessidade de duas funções de distribuição de equilíbrio, uma adequada para o escoamento superficial nos planos e outra adequada para o escoamento nos canais de bacias hidrográficas;
- v) Adequar as funções distribuição de equilíbrio de forma que contemplem as variáveis de interesse no escoamento em planos e em canais;
- vi) Estabelecer as condições de contorno para problemas envolvendo escoamentos superficiais unidimensionais;
- vii) Ajustar os parâmetros de simulação de acordo com as características dos problemas, de forma a obter estabilidade numérica;
- viii) Utilizar problemas conhecidos da Engenharia Hidráulica para confirmar a eficiência do modelo desenvolvido e calibrá-lo;
- ix) Comparar os resultados numéricos obtidos por meio do LBM-BGK para os escoamentos em bacias hidrográficas, com o modelo hidrológico KINEROS2 e com dados observados.

1.3 JUSTIFICATIVA

A água existente na terra é encontrada em três reservatórios principais. Estes reservatórios são os continentes, os oceanos e a atmosfera. Entre eles existe uma circulação contínua, chamada ciclo hidrológico. Componente deste ciclo, o escoamento superficial ocorre quando a água da chuva escoar livremente sobre a superfície do solo. Entre os inconvenientes causados pelo escoamento superficial, destaca-se, a erosão hídrica, como um dos graves problemas nas áreas agrícolas e florestais. Esta é responsável direta pela perda de nutrientes e redução da produtividade das culturas. Além de causar a destruição de habitats aquáticos e redução da capacidade de armazenamento de reservatórios, pelo transporte de agroquímicos e partículas do solo. Dessa forma, estimativas de escoamento superficial são fundamentais para verificação de risco de ocorrência de erosão em áreas agrícolas e florestais, do risco de ocorrência de inundações, e nos estudos de impacto ambiental (GRIBBIN, 2008).

As medições de campo do escoamento superficial tem alto custo financeiro, demandam tempo e, geralmente, não são realizadas em condições extremas. Estes fatos têm estimulado o desenvolvimento de modelos matemáticos para a estimação deste escoamento. Assim, um modelo hidrológico é definido como sendo uma representação matemática do fluxo de água e seus contribuintes sobre uma parte da superfície. Essa porção superficial de terra, limitada por um divisor de águas, que possui cursos de água, que convergem para uma única saída (exutório), é denominada bacia hidrográfica. A necessidade da obtenção de um modelo adequado, que sirva como base para um planejamento de uma bacia hidrográfica, vem do objetivo de equilibrar os vários usos da água com o meio ambiente (TUCCI, 1998).

Nesse sentido, os métodos numéricos ajudam a prever o comportamento hidráulico desses escoamentos, obtendo resultados suficientemente próximos dos observados. Em particular, o método do reticulado de Boltzmann tem se mostrado uma ferramenta promissora na dinâmica computacional de fluidos. Com abordagem diferenciada quando comparado com os métodos numéricos tradicionais, o LBM não utiliza discretizações nas equações governantes do escoamento. Devido a localidade das suas operações, o método pode ser paralelizado. Além disso, possui agilidade computacional e capacidade de lidar com geometrias complexas. Ainda, permite alterar o termo de força, incorporando ao método as características físicas do escoamento (PRESTININZI et al., 2016).

Todos os elementos citados anteriormente, confirmam a importância dos estudos das bacias hidrográficas, principalmente quanto ao gerenciamento de recursos hídricos e energéticos. Além disso, a simulação de bacias hidrográficas por meio do método do reticulado de Boltzmann, permite verificar a eficiência, a agilidade e a capacidade do método, que responde de forma satisfatória.

2 PESQUISAS RELACIONADAS

A seguir faz-se uma descrição de estudos que utilizaram o LBM na solução de problemas de escoamentos governados pelas equações de Navier-Stokes e escoamentos governados pelas equações de águas rasas.

Em 2004, Jian Guo Zhou desenvolveu um modelo reticulado de Boltzmann com reticulado D2Q9 para águas rasas com ou sem a consideração da turbulência denominado LABSWE e LABSWETM (*Lattice Boltzmann Model for the Shallow Water Equations Turbulence Modelling*). O modelo fornece um método alternativo para a solução das equações de águas rasas incluindo os efeitos da declividade do leito e da resistência ao escoamento, sendo capaz de resolver problemas de escoamento com e sem turbulência. Os efeitos são incluídos naturalmente, adicionados à equação do reticulado de Boltzmann como um termo de força, sem qualquer tratamento especial. Isso faz com que o modelo tenha capacidade potencial para resolver problemas práticos de escoamento. O autor propõe um esquema de colisão elástica para alcançar a condição de contorno de deslizamento e semi-deslizamento, também é introduzido um esquema centrado para maior acurácia no cálculo dos termos de força na equação do reticulado de Boltzmann. Essas ferramentas juntamente com o LBM, proporcionam um método numérico eficiente para hidrodinâmica e hidráulica ambientais. O modelo LABSWE foi verificado pela sua aplicação a vários problemas de escoamento como fluxo ao redor de um cilindro, escoamento sobre topografia irregular, fluxo de marés, escoamento turbulento em canal, escoamento em canal curvo, entre outros. Obteve-se excelente acordo entre simulações numéricas e soluções analíticas. O método proposto se mostra simples, eficiente e preciso para a solução das equações de águas rasas (ZHOU, 2004).

Em 2007, G. Thommes, M. Seaid e M. K. Banda aplicaram o LBM com reticulado D2Q9 para resolver as equações de águas rasas com declividade e resistência ao escoamento incorporados no termo de força da equação do reticulado de Boltzmann em situações práticas envolvendo problemas com soluções analíticas. Além disso, os autores testaram o método em um problema prático através da simulação de fluxo médio no Estreito de Gibraltar. Examina-se o desempenho do LBM para geometrias complexas com topografia irregular. O objetivo deste estudo é testar a precisão, eficiência do LBM e superar desafios existentes na abordagem de situações práticas, como em leitos não-planos com topografia irregular. Os autores concluíram que o método é simples, preciso, fácil de implementar, e também proporciona a adição de outros termos fonte como termo de força, tais como tensões de vento ou tensões de cisalhamento com o leito, sem a necessidade de tratamento especial. Os resultados indicam claramente que o método captura as estruturas de fluxo corretamente e reproduz resultados que concordam de maneira satisfatória com os dados

disponíveis na literatura para os mesmos problemas simulados. O método é competitivo em comparação com outras abordagens que resolvam as equações macroscópicas usando métodos de discretização direta (THOMMES; SEAID; BANDA, 2007).

Em 2010, Thang *et al.* analisam detalhadamente um modelo D1Q3 aplicado ao escoamento de águas rasas, e comparam os resultados com outros esquemas numéricos. Resultados analíticos são utilizados para discutir a precisão e estabilidade do modelo. Os autores mostraram como modelos D1Q3 podem ser combinados com estruturas hidráulicas interconectadas para a simulação de redes complexas de irrigação. Também propõe-se uma análise detalhada de como adicionar um termo de força no LBM. O modelo LBM D1Q3 foi comparado com um esquema de diferenças finitas implícito e uma abordagem de volumes finitos. O LBM mostrou-se mais preciso e significativamente mais rápido em comparação aos outros métodos. A estratégia de acoplamento apresentada permite simular muitas seções dos canais interligados através de diferentes tipos de estruturas como portões, vertedouros, estações de bombeamento e ramificações (THANG *et al.*, 2010).

Em 2010, Zhou *et al.* apresentam diversas aplicações utilizando os modelos LBM D2Q9 LABSWE e LABSWETM para escoamento de águas rasas com e sem turbulência. As simulações de escoamento são realizadas em quebra de barragem, canal sinuoso, fluxo em torno de um dique de correção torrencial “*spur-dyke*”, escoamento assimétrico em um canal de expansão simétrica. Os resultados mostram que os modelos podem produzir soluções numéricas para escoamentos complicados em canal (incluindo escoamentos permanentes e não-permanentes, contínuos e descontínuos), com boa precisão e comparáveis com os métodos tradicionais. Os resultados também indicam que os métodos precisam ser melhorados para alguns problemas de escoamento em canal. As vantagens dos modelos são a simplicidade e eficiência, juntamente com fácil tratamento das condições de contorno. Os modelos LABSWE e LABSWETM são potencialmente ferramentas muito poderosas para simulação de escoamentos de águas rasas em grande escala no tratamento de problemas práticos de engenharia (ZHOU *et al.*, 2010).

Em 2011, W. Xiong, J. Zhang propuseram um modelo LBM D2Q9 para escoamento em canais uniformes resolvendo as equações de Navier-Stokes para a velocidade axial como uma equação dinâmica de difusão no plano de seção transversal. Um tratamento de extrapolação para a condição de contorno não-derrapante na superfície do canal foi desenvolvido. Também modificou-se o método de fronteira de extrapolação para alcançar uma condição de contorno de Dirichlet (valor constante) para a equação de difusão. O algoritmo e condição de contorno foram validados através da simulação de escoamentos de Poiseuille estável e fluxo pulsátil de Womersley através de tubos circulares. Observa-se excelente concordância em comparação com soluções teóricas. Simulações de fluxos através de um canal retangular demonstraram que o modelo proposto utiliza menos memória do computador, leva menos tempo computacional, e é aplicável a maiores velocidades

em comparação com modelos gerais LBM tridimensionais. O tratamento de fronteira proposto também é útil para simulações LBM de processos de convecção-difusão em várias aplicações (XIONG; ZHANG, 2011).

Em 2013, B. Chopard, V. T. Pham, L. Lefèvre consideram uma mudança de referencial pela transformação de Galileu na aplicação do LBM D1Q3 em escoamento de águas rasas. O novo modelo pode descrever escoamentos de água rasas unidimensionais com números de Froude maiores que 1 (escoamento supercrítico), um regime que é numericamente instável na abordagem padrão do LBM. Este modelo também é capaz de simular a transição fluvial-torrencial, que é conhecida como uma tarefa difícil de ser realizada. A aplicação da transformação de Galileu na forma padrão do LBM resulta em velocidade assimétrica no reticulado, o que é bem apropriado para descrever um escoamento com alta velocidade em uma direção. A desvantagem do modelo D1Q3 padrão é a sua faixa de estabilidade. O modelo proposto corrige este problema, pois é aplicável para todos os números de Froude (CHOPARD; PHAM; LEFÈVRE, 2013).

Em 2014, R. Zarita e M. Hachemi simularam escoamento de fluidos e transferência de calor no interior de microcanais. O principal incentivo para olhar o comportamento de fluidos em microescala é que os microdispositivos tendem a se comportar de forma muito diferente dos objetos que são utilizados para a manipulação na vida diária. A escolha da utilização do LBM para a simulação de microfluxo é boa, devido ao fato de que ele baseia-se na equação de Boltzmann, que é válida para todo número de Knudsen. Condições de contorno de velocidade de deslizamento e salto de temperatura na parede, são utilizados para as simulações de microcanais. Para abordar os contornos usou-se a pesquisa de Zou e He (1997). O modelo de reticulado utilizado foi o D2Q9. Os resultados encontrados são comparados com os resultados analíticos e numéricos de Navier-Stokes disponíveis na literatura. Foram encontrados resultados para o perfil de velocidade ao longo do microcanal para diferentes número de Knudsen, estes resultados são plotados juntamente com a solução analítica e bons resultados são observados (ZARITA; HACHEMI, 2014).

Em 2014, Peng *et al.* modelaram numericamente escoamentos em águas rasas sobre leitos descontínuos. O LBM foi utilizado com tempo único de relaxamento (operador de colisão BGK) e tempo múltiplo de relaxamento (operador de colisão MRT) sobre o reticulado D2Q9. Utiliza-se um esquema centrado ponderado para o termo de força relacionado com a altura e declividade do leito. Além disso, a tensão de resistência é adicionada para incluir a perda de carga local causada pelo fluxo sobre obstáculo. Ao contrário de outros métodos numéricos, não é necessário tratamento adicional no método descrito para simulação de escoamento sobre um leito com um degrau vertical. Para verificação do método, foram realizadas simulações em marés com leito regular e com obstáculos, quebra de barragem e escoamento de águas rasas ao longo de um bloco quadrado. Os resultados mostraram que o LBM é simples e preciso para a simulação de

fluxos de águas rasas ao longo de leitos descontínuos (PENG et al., 2014).

Em 2015, La Rocca *et al.* desenvolveram e validaram um modelo discreto de Boltzmann capaz de resolver as equações de águas rasas bidimensionais em escoamentos transcíticos. Para este fim, um particular conjunto de velocidades foi empregado na discretização da equação de Boltzmann. Mostra-se que este conjunto de velocidades naturalmente produz um procedimento para determinar as funções de distribuição de equilíbrio de ordem superior necessárias para simular o escoamento transcítico. Vários problemas clássicos de escoamento são realizados para validar o modelo que simula corretamente e com acurácia escoamentos em uma e duas dimensões transcíticos. Neste estudo conclui-se que os modelos baseados no LBM podem ser estendidos para a simulação de escoamentos de águas rasas transcíticos e supercríticos (ROCCA et al., 2015).

Em 2015, S. Zergani, Z. A. Aziz e K. K. Viswanathan fazem uma implementação do LBM para a simulação numérica da propagação de ondas longas oceânicas como, por exemplo, tsunamis. O estudo propõe um modelo via LBM D2Q9 com base na equação de ondas de águas rasas não-linear (NSW). aplicada em ondas de superfície irrotacionais em caso de complexa elevação de fundo do canal. Vários casos testes são apresentados para verificar o modelo proposto. Discussões acerca de algumas implicações na modelagem de onda de tsunami também são realizadas. A eficiência e acurácia do modelo são confirmadas por simulações numéricas. Nota-se que para alcançar uma maior precisão, o modelo LABSWE requer um intervalo de tempo relativamente pequeno, da ordem de 10^{-3} a 10^{-4} . Os resultados numéricos encontrados estão em excelente acordo com a teoria (ZERGANI; AZIZ; VISWANATHAN, 2015).

Em 2015, Liu *et al.* apresentam uma nova abordagem utilizando o LBM D1Q3 para resolver as equações unidimensionais de Saint-Venant. O modelo desenvolvido, denominado LABSVE, demonstra a variação da descarga e da área da seção transversal do canal com forças externas, tais como declividade do leito e atrito com o leito. Faz-se a recuperação das equações de Saint-Venant através da expansão de Chapman-Enskog na equação do reticulado de Boltzmann. O processo é totalmente explícito, o que fornece simplicidade para a programação. O modelo é verificado por meio de alguns testes: escoamento subcrítico unidimensional, onda em quebra de barragem e inundação no rio Yongding na China. Os resultados mostraram a precisão do método proposto e a sua boa aplicabilidade na resolução de problemas representados pelas equações de Saint-Venant. O modelo é capaz de dar resultados confiáveis para escoamentos em canal com seções variadas ou frente de água íngreme (LIU et al., 2015).

Em 2015, S. Li, P. Huang, J. Li propuseram modificações no LBM para descrever escoamentos de águas rasas em topografia complexa. Em seu modelo, o termo quadrático de profundidade é excluído das funções de distribuição de equilíbrio, e o termo pressão hidrostática é combinado com o termo de declividade do leito para ser tratado como parte

da equação do reticulado de Boltzmann. Isso traz mais flexibilidade para o tratamento dos termos fonte na equação do reticulado de Boltzmann. Várias aplicações são simuladas para validar o modelo proposto, incluindo caso estacionário, escoamento bidimensional com obstáculo, e fluxos de marés sobre elevação do leito irregular. Os resultados estão em excelente acordo com os resultados dos outros métodos numéricos e soluções analíticas, indicando que o modelo proposto é capaz de simular escoamentos de águas rasas ao longo de topografia complexa (LI; HUANG; LI, 2015).

Em 2016, Zhang *et al.* verificam a eficiência do LBM-MRT na simulação do escoamento em canais com problemas práticos em engenharia. A proposta foi melhorar a implementação do LBM-MRT e LBM-BGK em uma unidade de processamento gráfico (GPU - *graphic processing unit*). A confiabilidade do LBM-MRT foi verificada por meio de problemas bem conhecidos na Engenharia Hidráulica e que possuem solução analítica. Depois de verificada a capacidade e confiabilidade do modelo desenvolvido, os pesquisadores aplicaram o modelo em duas hidrelétricas, simulando o escoamento da água em canal com formação de cascata. Nota-se neste estudo, que não há comparação das simulações de escoamento com formação de cascata, com outros métodos numéricos, soluções analíticas ou dados experimentais. Tem-se, em vez disso, o refinamento da malha e a observância do comportamento. Os resultados obtidos são considerados razoáveis e mostram que o LBM é capaz de simular problemas reais. Uma outra contribuição interessante deste estudo é a afirmação de que uma malha fina e passo de tempo pequeno, são capazes de simular de forma eficiente escoamentos bidimensionais de águas rasas. Além disso, observou-se que a performance do LBM-BGK e do LBM-MRT são similares, porém recomenda-se o uso do LBM-MRT em problemas práticos por conta da sua maior estabilidade. Os autores ainda sugerem que novas pesquisas serão realizadas, abordando canais com seção trapezoidal, o que incrementará a capacidade do LBM (ZHANG et al., 2016).

Em 2017, A. D. Rosis propõe a decomposição do operador de colisão BGK, presente na equação do LBM, em termos de uma base não-ortogonal de momentos centrais, com o objetivo de simular problemas governados pelas equações de águas rasas. O reticulado usado é o D2Q9 e as funções distribuições de equilíbrio foram reescritas levando em consideração a base não-ortogonal escolhida. O modelo foi validado por meio da simulação de cinco problemas bem conhecidos da Engenharia Hidráulica, escoamento em canal com obstáculo no fundo (*flow over a bump*), onda de maré (*tidal wave*), ruptura de barragem (*dam break*), ruptura circular de barragem (*circular dam break*) e escoamento ao redor de um cilindro com base circular (*flow around a cylinder*). De acordo com o autor, o modelo proposto é consistente e os resultados se mostram em muito bom acordo com soluções analíticas e dados experimentais (ROSIS, 2017).

As descrições que seguem destacam algumas pesquisas importantes sobre escoamentos governados pelo modelo de onda cinemática e a equação de Burgers. Os artigos

relacionados a equação de Burgers fornecem resultados teóricos importantes que podem ser utilizados para recuperar as equações do modelo onda cinemática.

Em 2008, J. Zhang, G. Yan propõem um modelo LBM que utiliza momentos de alta ordem para determinar a função distribuição de equilíbrio que recupera a equação de Burgers, sem termo de força, em uma e duas dimensões. São obtidas as equações do reticulado de Boltzmann em diferentes escalas de tempo, que representam um resultado fundamental para a construção dos modelos. Para alcançar acurácia de alta ordem, utiliza-se sete momentos da função distribuição de equilíbrio no modelo unidimensional, e quatro momentos no modelo bidimensional. A equação de Burgers unidimensional é derivada com erro de truncamento de sexta ordem. Porém, para a equação de Burgers bidimensional, a acurácia obtida é de segunda ordem. Também são descritos o modelo unidimensional de cinco velocidades, e o modelo bidimensional hexagonal de sete velocidades. Análises do erro de truncamento mostram teoricamente a acurácia obtida pelos modelos descritos. Exemplos numéricos são resolvidos, onde é comparada a solução analítica com a solução numérica obtida pelo LBM com reticulado de cinco e sete velocidades, em uma e duas dimensões (ZHANG; YAN, 2008).

Em 2010, J. Zhang, G. Yan desenvolvem um modelo LBM para a equação de Burger-Fisher unidimensional e bidimensional que pode representar a equação de Burgers, equação de Fisher e a equação de onda de choque. O novo modelo baseia-se na técnica de utilização de momentos de alta ordem de funções de distribuição de equilíbrio e aplicação das equações diferenciais parciais do reticulado de Boltzmann em diferentes escalas de tempo. Para não ocorrer o fenômeno de erro de rebote, utiliza-se uma nova hipótese de termo adicional na equação do reticulado de Boltzmann, em que são utilizados dois termos adicionais, em primeira ordem e segunda ordem separadamente. As comparações com os resultados obtidos por outros métodos revelam que as soluções numéricas obtidas pelo método proposto convergem para soluções analíticas. O modelo sob nova suposição fornece melhores resultados que a hipótese de segunda ordem e mostra-se capaz de simular problemas que envolvam convecção, difusão e termo de reação (ZHANG; YAN, 2010).

Em 2014, Zhang *et al.* aplicam o LBM com reticulado D1Q5 ao escoamento superficial. Utilizando a solução analítica de um problema de escoamento em superfície plana, é feita a comparação dos resultados obtidos pelo LBM com o método implícito de quatro pontos de Preissmann. Os resultados indicam que a precisão de cálculo do LBM é maior do que o método implícito de Preissmann acerca das variações de profundidade da água e da descarga por unidade de largura na parte inferior do plano de escoamento, especialmente no estágio de escoamento de recessão e na descrição da distribuição da profundidade da água e descarga por unidade de largura ao longo do comprimento do plano antes do tempo de concentração. Mas, após o tempo de concentração, a precisão de cálculo do LBM é menor no cálculo da distribuição da profundidade da água e da descarga

por unidade de largura ao longo do comprimento do plano. Recomenda-se que o tempo de relaxamento seja tomado entre 1 e 1,2 na aplicação do LBM na simulação de escoamento superficial (ZHANG et al., 2014).

Em 2015, X. Zhang, J. Feng, T. Yang propõem a aplicação do LBM, com reticulado D1Q3, para simular o escoamento em uma superfície plana descrito pelo modelo onda cinemática. Com base na expansão multi-escala de Chapman-Enskog, um método de análise em várias escalas e um método de coeficiente indeterminado são usados para obter as funções de distribuição de equilíbrio com valores não negativos. A abordagem proposta é validada pela realização de experimentos que simulam o escoamento de água em superfícies planas impermeáveis e permeáveis com o uso de macroporos artificiais do solo. Os resultados experimentais mostram que o método do reticulado de Boltzmann é eficaz na descrição de escoamentos superficiais. A simulação não apresenta oscilações numéricas, e as funções de distribuição são positivas quando o tempo de relaxamento é de 0,8 a 2,0 (ZHANG; FENG; YANG, 2015).

Com base nas pesquisas descritas anteriormente, tem-se que o LBM é um método com características muito desejáveis em simulações numéricas. O método é relativamente novo e tem pontos importantes ainda em aberto. Porém, sua capacidade de simulação em escoamentos de águas rasas em canais e em escoamento superficial em planos, é confirmada pelos diversos estudos realizados. Pretende-se nesta tese, contribuir com a pesquisa que vem sendo desenvolvida e tornando o LBM uma ferramenta de grande valia na dinâmica de fluidos computacional.

3 EQUAÇÕES GOVERNANTES

Neste capítulo, inicialmente, são apresentadas as equações de águas rasas que são derivadas a partir do sistema de Navier-Stokes, e, em seguida, têm-se as equações referentes ao modelo onda cinemática, que são derivadas das equações de águas rasas.

3.1 EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS

As equações que governam escoamentos incompressíveis são a equação da continuidade e as equações de Navier-Stokes. Estas equações são obtidas pela conservação da massa e pela segunda lei de Newton para o movimento. Utilizando a forma tensorial com a convenção do somatório de *Einstein*, a equação da conservação de massa é escrita por (ZHOU, 2004),

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (3.1)$$

e as equações da quantidade de movimento são dadas pela expressão:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial(u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + F_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2)$$

onde, i e j são índices de direção espacial, em que os valores 1, 2 e 3 indicam respectivamente, as direções x , y e z . O índice i é o índice livre e j é o índice mudo; x_j é o componente do vetor posição \vec{x} , assume x , y e z ; u_j é o componente do vetor velocidade do fluido \vec{u} , assume u_x , u_y e u_z ; F_i é a força de campo por unidade de massa na direção i , assume F_x , F_y e F_z ; ρ é a massa específica; ν é a viscosidade cinemática; p é a pressão; t é o tempo.

De acordo com Chaudhry (2008), os termos nas equações de Navier-Stokes (3.2) são interpretados fisicamente. Tem-se o termo de inércia,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial(u_i)}{\partial x_j}, \quad (3.3)$$

em que,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad (3.4)$$

representa a aceleração local e,

$$u_j \frac{\partial(u_i)}{\partial x_j}, \quad (3.5)$$

é a aceleração convectiva. O termo de pressão,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (3.6)$$

a viscosidade,

$$\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (3.7)$$

e, o termo de força externa,

$$F_i. \quad (3.8)$$

As equações (3.1) e (3.2) são equações gerais para escoamentos incompressíveis. A solução analítica destas equações só é possível em casos muito simplificados. Dessa forma, emprega-se o uso do computador para encontrar soluções pela aplicação de métodos numéricos. Em alguns casos, mesmo numericamente não é possível obter soluções utilizando as equações completas de Navier-Stokes, isto ocorre devido a tecnologia atual de processamento dos computadores não comportar o grande número de pontos necessário para o domínio computacional. Na prática são feitas simplificações com o objetivo de obter soluções com razoável eficiência e precisão (ZHOU, 2004).

As equações de águas rasas, também denominadas equações de Saint-Venant, são obtidas das equações gerais de escoamento e descrevem o escoamento quando $h \ll L$, em que h representa a profundidade do escoamento e L o comprimento das ondas oscilatórias. Nesta circunstância, a celeridade das ondas pode ser dada por $C = \sqrt{gh}$, em que g é a aceleração da gravidade (HENDERSON, 1966).

Segundo Chaudhry (2008), suposições simplificadoras são consideradas nas equações gerais de escoamento para obter as equações de águas rasas:

1. A distribuição de pressão é hidrostática, isto é, a aceleração vertical é negligenciada. Suposição válida quando as linhas de corrente não tem curvaturas acentuadas;
2. A declividade do fundo do canal é pequena de modo que a profundidade do escoamento seja aproximadamente a mesma quando medida verticalmente ou perpendicularmente ao fundo;
3. A velocidade do escoamento através da seção transversal em todo o canal é uniforme;
4. O canal é prismático, isto é, a seção transversal e a declividade do fundo do canal não mudam com a distância;
5. As perdas de carga no escoamento não-permanente podem ser simuladas usando as leis de resistência em regime permanente, como a equação de Manning ou Chezy,

isto é, perdas de carga para uma dada velocidade do fluido durante o escoamento não-permanente são as mesmas durante o escoamento permanente.

As equações bidimensionais de águas rasas podem ser descritas na forma tensorial, pela equação da conservação de massa e a equação da conservação da quantidade de movimento, respectivamente Zhou (2004),

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (3.9)$$

$$h \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -g \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{h^2}{2} \right) + \nu \frac{\partial^2(hu_i)}{\partial x_j \partial x_j} + F_i, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad (3.10)$$

em que, h é a profundidade do escoamento, g é a aceleração da gravidade.

O termo F_i é o termo de força definido como,

$$F_i = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x_i} + \frac{\tau_{si}}{\rho} - \frac{\tau_{bi}}{\rho} + E_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.11)$$

onde, z_b é a elevação do leito (efeito da gravidade e pressão), τ_{si} é a tensão de cisalhamento do vento na superfície livre na direção i , τ_{bi} é a tensão de cisalhamento devido a resistência ao escoamento na direção i , E_i é o termo de Coriolis na direção i .

As tensões de cisalhamento no fundo do canal são estimadas por meio de fórmulas empíricas, como por exemplo, a equação de Chezy (CHAUDHRY, 2008). Essas tensões são obtidas pela expressão (THOMMES; SEAID; BANDA, 2007),

$$\tau_{bi} = \rho C_b u_i \sqrt{u_j u_j}, \quad (3.12)$$

em que C_b é o coeficiente de resistência ao escoamento, que pode ser um valor constante ou estimado por $C_b = g/C_z^2$. O coeficiente de Chézy C_z é determinado em termos do raio hidráulico R e do coeficiente de rugosidade de Manning n_b ,

$$C_z = \frac{R^{1/6}}{n_b}. \quad (3.13)$$

O valor de n_b depende principalmente da rugosidade da superfície, da quantidade de vegetação, e da irregularidade do canal (CHAUDHRY, 2008). Em Porto (2006), encontram-se tabelados valores do coeficiente n_b para vários tipos de revestimentos em canais artificiais e em cursos naturais de água.

Para determinar a tensão de cisalhamento do vento na superfície livre, utiliza-se geralmente a expressão (ZERGANI; AZIZ; VISWANATHAN, 2015),

$$\tau_{si} = \rho_a C_r u_{si} \sqrt{u_{sj} u_{sj}}, \quad (3.14)$$

em que, ρ_a é a massa específica do ar, C_r é o coeficiente de resistência, u_{si} é a componente da velocidade do vento na direção i .

Assumindo que o fundo do canal é um plano inclinado com pequena declividade, negligenciando as tensões de cisalhamento devido à velocidade do vento que age na superfície da água e negligenciando os efeitos da aceleração de Coriolis (estas são premissas válidas para aplicações típicas de Engenharia Hidráulica), as equações de águas rasas podem ser escritas nas variáveis h , u_x e u_y como (CHAUDHRY, 2008),

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu_j)}{\partial x_j} = q_l, \quad (3.15)$$

$$h \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -g \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{h^2}{2} \right) + \nu \frac{\partial^2(hu_i)}{\partial x_j \partial x_j} - gh(S_{oi} - S_{fi}), \quad (3.16)$$

em que, S_{oi} é a declividade do fundo do canal na direção i , S_{fi} é a declividade da linha de energia na direção i , q_l é a contribuição lateral.

Se a equação de Manning for utilizada para calcular os efeitos da resistência ao escoamento em vez da equação de Chezy, a declividade da linha de energia pode ser obtida pela equação (CHAUDHRY, 2008),

$$S_{fi} = \frac{n_b^2 u_i \sqrt{u_j u_j}}{C_o^2 h^{1,33}}, \quad (3.17)$$

em que, C_o é uma constante dimensional, $C_o = 1$ para unidades no sistema internacional (SI) e $C_o = 1,49$ para unidades no sistema inglês de engenharia.

3.2 ESCOAMENTO SUPERFICIAL E O MODELO ONDA CINEMÁTICA

As equações de águas rasas unidimensionais governam o escoamento onde há superfície livre, com a suposição de que a componente vertical e transversal da velocidade do escoamento podem ser desprezadas em relação ao componente longitudinal (CHAUDHRY, 2008). Esta descrição é adequada para sistemas de ondas longas, em que o comprimento da onda é muito maior que a profundidade. As equações de águas rasas unidimensionais formam um sistema de equações não-lineares composto pelas equações da continuidade (3.18), e da quantidade de movimento (3.19),

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q_l, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} = gA(S_o - S_f), \quad (3.19)$$

onde Q é a vazão, A é a área da seção transversal, g é a aceleração da gravidade, t é o tempo, x é a coordenada espacial, S_o é a declividade do fundo e S_f representa a declividade da linha de energia.

Para a resolução das equações completas de águas rasas é exigido uma grande quantidade de dados hidráulicos e elaboradas técnicas numéricas, principalmente se forem aplicadas ao escoamento superficial em bacias hidrográficas ou em rios naturais (PORTO, 2006).

No escoamento em bacias hidrográficas utiliza-se o modelo onda cinemática como simplificação das equações de águas rasas. Este modelo, considera a equação da continuidade e a equação da quantidade de movimento, desprezando os termos de pressão e inércia. Dessa forma, a equação da quantidade de movimento resulta (TUCCI, 1998),

$$S_o = S_f. \quad (3.20)$$

O modelo onda cinemática baseia-se, principalmente, na equação da continuidade e faz-se uma aproximação da equação da quantidade de movimento por uma fórmula de fluxo uniforme. Definindo a declividade da linha de energia S_f , com uma fórmula de fluxo uniforme, a equação (3.20) pode ser representada para o escoamento em canal ou em escoamento superficial por uma relação de potência da forma (MILLER, 1984),

$$Q = \beta A^m, \quad (3.21)$$

em que, β e m são coeficientes determinados pelas características do escoamento. Este modelo não-linear considera a variabilidade dos parâmetros de acordo com a vazão. Assim, o escoamento em trechos de canais da bacia é dado pelas equações,

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= q_l, \\ Q &= \beta_c A^{m_c}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde, q_l é a contribuição lateral, β_c e m_c são parâmetros a serem determinados.

As condições iniciais e de contorno nos canais são determinadas por hidrogramas de vazão resultantes do escoamento na superfície e em trechos de canais a montante.

A superfície da bacia é aproximada por planos. Assim, considerando que a equação da continuidade (3.18) descreva o escoamento em um canal prismático e retangular, as equações de escoamento para os planos que descrevem a superfície da bacia são as seguintes,

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= i_e, \\ q &= \beta_s h^{m_s},\end{aligned}\tag{3.23}$$

onde, q é a vazão por unidade de largura, h é a profundidade do escoamento, i_e é a precipitação efetiva, β_s e m_s são parâmetros a serem determinados.

As condições iniciais e de contorno são representadas no plano por,

$$\begin{aligned}h(0, t) &= 0 \quad t > 0, \\ h(x, 0) &= 0 \quad 0 \leq x \leq L,\end{aligned}\tag{3.24}$$

onde, L é o comprimento de declive.

A aplicação do modelo onda cinemática em escoamento superficial difere da sua aplicação em rios, apenas pelo meio onde ocorre o escoamento. Quanto a rugosidade, utiliza-se a resistência hidráulica de Manning como descrito a seguir.

Os parâmetros que envolvem as vazões nas equações (3.22) e (3.23) são determinados pela aplicação da fórmula de Chezy para escoamento permanente e uniforme (GILES, 1977),

$$u = C_z \sqrt{RS_o},\tag{3.25}$$

onde, u é a velocidade média, C_z é um coeficiente, S_o é a declividade da superfície da água ou do fundo do canal e $R = A/P$ é o raio hidráulico, em que A é a área da seção transversal e P é o perímetro molhado.

Se o coeficiente C_z for dado pela fórmula de Manning (equação 3.13), a velocidade do escoamento é determinada por,

$$u = \frac{S_o^{1/2}}{n_b} R^{2/3}.\tag{3.26}$$

A vazão em uma seção transversal do escoamento é descrita pelo produto da área da seção pela velocidade média. Em termos da fórmula de Manning, a vazão no canal é dada por,

$$Q = Au = \frac{S_o^{1/2}}{n} R^{2/3} A.\tag{3.27}$$

Substituindo o raio hidráulico na equação (3.27), obtém-se,

$$Q = \frac{S_o^{1/2}}{n_b P^{2/3}} A^{5/3}, \quad (3.28)$$

comparando as equações (3.28) e (3.22), determinam-se os parâmetros β_c e m_c do escoamento em canais,

$$\beta_c = \frac{S_o^{1/2}}{n_b P^{2/3}}, \quad m_c = \frac{5}{3}. \quad (3.29)$$

Para encontrar os parâmetros β_s e m_s correspondentes aos planos de escoamento, multiplica-se a profundidade h na equação (3.26) da velocidade de escoamento uniforme, obtendo-se a vazão por unidade de largura do plano,

$$hu = q = \frac{S_o^{1/2}}{n_b} h R^{2/3}. \quad (3.30)$$

Nos planos, o escoamento é de grande largura, dessa forma, a suposição $R \approx h$ pode ser considerada. A vazão por unidade de largura do plano é dada por,

$$q = \frac{S_o^{1/2}}{n_b} h^{5/3}, \quad (3.31)$$

comparando a equação (3.31) com a equação (3.23), obtém-se os parâmetros β_s e m_s do escoamento nos planos,

$$\beta_s = \frac{S_o^{1/2}}{n_b}, \quad m_s = \frac{5}{3}. \quad (3.32)$$

4 AUTÔMATOS CELULARES

O método do reticulado de Boltzmann surgiu a partir de inconvenientes presentes em modelos baseados nos autômatos celulares e, portanto, foi construído com fortes influências dos autômatos celulares e dos autômatos celulares de gás em rede. Porém, existe mais de uma forma de obter o LBM. Uma delas é a derivação a partir do autômato celular do tipo gás em rede e a outra forma é a derivação a partir da equação de Boltzmann. Neste sentido, pretende-se abordar neste capítulo as principais características do LGCA e do seu antecessor, os autômatos celulares.

4.1 AUTÔMATO CELULAR

Na natureza e na sociedade encontram-se vários sistemas, denominados sistemas complexos, em que o comportamento global é gerado pelas interações dos componentes individuais. Alguns desses sistemas são ecossistemas, economias, clima, sistemas nervosos e propagação de doenças. Os autômatos celulares podem ser utilizados na simulação de sistemas complexos (MELOTTI, 2009).

Autômatos celulares (CAs) são idealizações matemáticas de sistemas físicos em que o espaço e o tempo são discretos e as quantidades físicas assumem um conjunto finito de valores discretos. Um CA consiste de um *lattice* uniforme e regular, ou *array*, com uma variável discreta em cada local (célula). O estado de um CA é estabelecido pelos valores das variáveis em cada local. Um CA evolui em intervalos de tempo discretos, com o valor da variável no mesmo local a ser afetado por valores das variáveis em vários locais na sua vizinhança no passo de tempo anterior. As variáveis em cada local são atualizadas simultaneamente, com base nos valores das variáveis em sua vizinhança no passo de tempo anterior, e de acordo com um conjunto definido de regras locais (WOLFRAM, 1994).

Um CA foi inicialmente proposto por John von Neumann e Stanislaw Ulam no final da década de 1940 para simular a vida em sistemas biológicos autorreprodutivos, com o objetivo de obter comportamentos complexos pela aplicação de regras simples. Desde então, os autômatos têm sido desenvolvidos e aplicados em outros tipos de idealizações e tornaram-se uma poderosa ferramenta na simulação de vários problemas científicos. É um modelo simples que é caracterizado por um conjunto de autômatos finitos com as mesmas regras de evolução. A base dos CAs é que o espaço é dividido em células e o tempo é discreto. Cada uma das células tem um estado inicial o qual será atualizado de acordo com regras simples (CHOPARD; DROZ, 1998).









Quatro elementos fundamentais caracterizam os CAs: o estado inicial, os estados possíveis de cada célula, a sua vizinhança e a regra de transição local. Existem autômatos

n-dimensionais, sendo que os autômatos unidimensionais são os mais simples e podem ser representados por um vetor de células, e cada geração posterior fica representada em um novo vetor. Assim pode-se observar a evolução dos autômatos a cada passo de tempo. Já os autômatos bidimensionais podem ser representados por uma matriz e a cada passo de tempo tem-se uma nova matriz (ILACHINSKI, 2001).

Uma regra de atualização é local, pois depende do estado da própria célula e de células na sua vizinhança. Uma vizinhança tem raio $r = 1$ quando são consideradas as células imediatamente adjacentes. Um CA unidimensional com o conjunto de possíveis estados $S = \{0, 1\}$, ou branco e preto, e vizinhança de raio 1 (célula à esquerda e célula à direita) é denominado CA elementar. Existem 256 CAs elementares distintos (CHOPARD; MASSELOT, 1999).

Wolfram (1994), estudou e classificou regras para CAs elementares. Cada regra elementar é determinada por uma sequência de oito dígitos binários para especificar um CA. As regras locais podem ser consideradas como uma função booleana das células dentro da vizinhança.

A Figura 3 ilustra a identificação do autômato elementar chamado de Regra 150.

							
111	110	101	100	011	010	001	000
1	0	0	1	0	1	1	0

$$10010110_2 = 150_{10}$$

Figura 3 – Regra 150

Fonte: Wolfram (1994).

Na Regra 150, o estado das células no próximo passo de tempo é encontrado pela função de atualização $s_+ = s^- \oplus s \oplus s^+$, onde s_+ é o novo estado, s o estado anterior, s^- o estado da célula à esquerda, s^+ o estado da célula à direita e \oplus indica a adição módulo 2. A evolução da Regra 150 com 51 células e 16 iterações, porém com apenas duas células com estado 1 é mostrada na Figura 4.

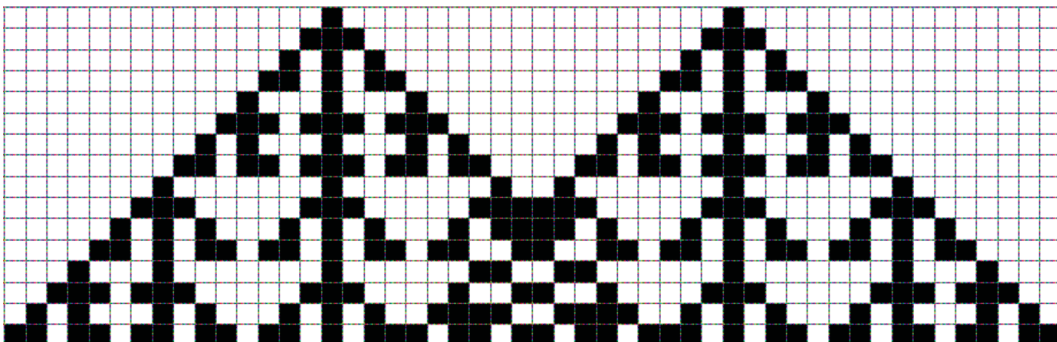


Figura 4 – Evolução da Regra 150

Wolfram (1994), após vários experimentos com regras de CAs elementares utilizando estados iniciais aleatórios, classifica os autômatos em quatro classes, as classes de Wolfram, descritas a seguir:

- **Classe 1** : a evolução do autômato resulta em um estado uniforme, onde todas as células têm somente o estado 0 ou somente estado 1;
- **Classe 2** : a evolução do autômato resulta em estruturas estáveis ou periódicas, de forma simples e separadas;
- **Classe 3** : a evolução do autômato leva a um comportamento caótico;
- **Classe 4** : a evolução do autômato leva a formação de estruturas complexas.

Diagramas espaço-tempo para ilustração de cada classe de Wolfram são mostradas na Figura 5.

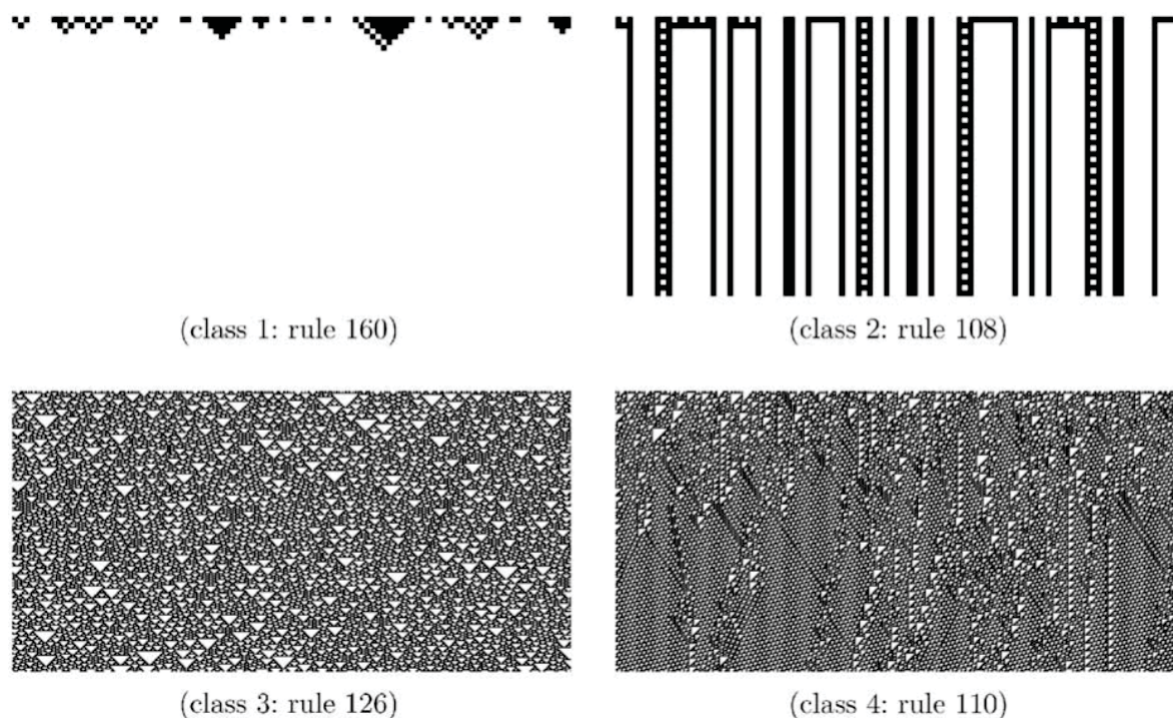


Figura 5 – Diagramas espaço-tempo para cada classe de Wolfram

Fonte: Kari (2005).

O CA mais conhecido é o chamado *jogo da vida*, criado pelo matemático John Horton Conway no final da década de 1960. É um autômato bidimensional, utiliza a vizinhança de Moore que considera as oito células ao redor, e tem apenas dois estados para as células, “viva” ou “morta”. As iterações ocorrem de maneira que as células entrem em um ciclo de vida, nascendo, permanecendo vivas e morrendo. A regra de atualização local simula a vida artificial da seguinte forma (ILACHINSKI, 2001):

- Cada célula viva permanece viva na próxima geração se tiver exatamente duas ou três células adjacentes vivas;
- Cada célula morta nascerá na próxima geração se ela tiver exatamente três células adjacentes vivas;
- Cada célula viva com quatro ou mais células adjacentes vivas morrerá por excesso de densidade populacional;
- Cada célula que tiver menos de duas células vivas adjacentes morrerá por isolamento.

O software *Golly* é uma aplicação *open source* utilizada para a simulação de populações conforme as regras dadas pelo jogo da vida e outros CAs. A Figura 6 mostra a configuração inicial com uma população de quatro células. Após 100 gerações (iterações) a população aumenta para 121 células, como mostra a Figura 7. Na geração de número 500 a população passa para 174 células, conforme Figura 8.

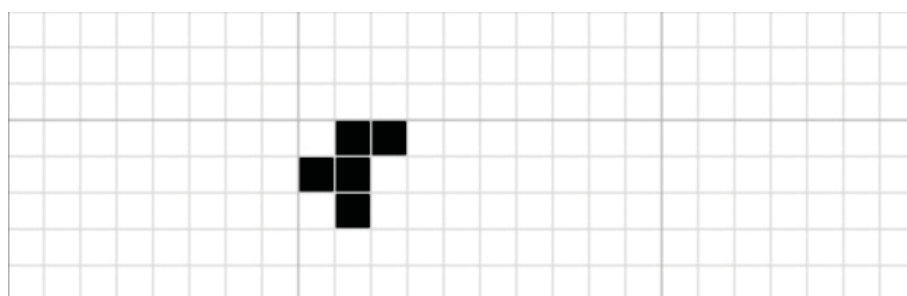


Figura 6 – Jogo da Vida - Configuração inicial de células

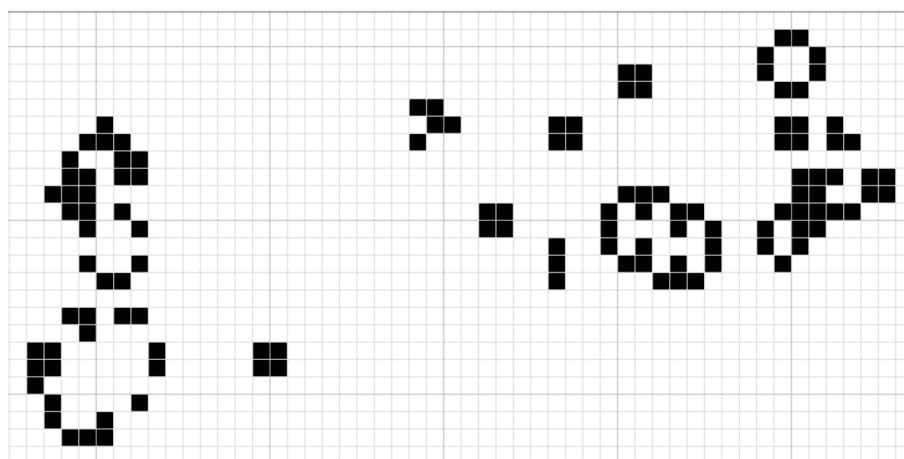


Figura 7 – Jogo da Vida - Geração 100

O *jogo da vida* representa em formato matemático as mutações que ocorrem entre gerações de uma população, podendo ser aplicado em diversas áreas. A seguir tem-se algumas aplicações de CAs.

Conforme Melotti (2009), os CAs são capazes de representar fenômenos naturais como o espalhamento de epidemias. Propõem-se regras simples para a simulação da

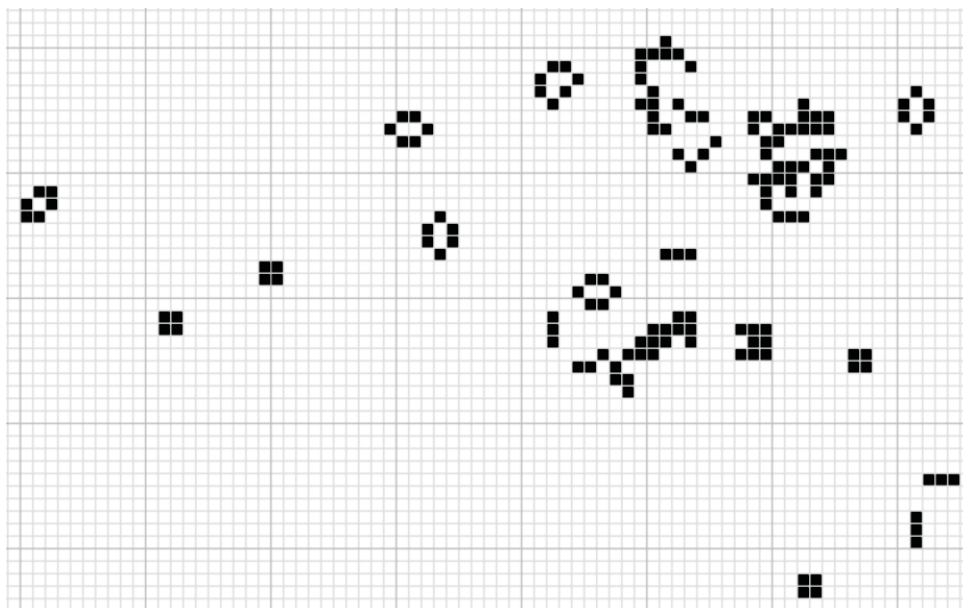


Figura 8 – Jogo da Vida - Geração 500

propagação de uma doença genérica entre indivíduos de uma população, os quais são caracterizados pelos estados do sistema: suscetíveis, infectados e recuperados. Foram considerados os vizinhos como contatos locais e a capacidade do indivíduo infectado se deslocar e infectar um suscetível a uma determinada distância. O comportamento do sistema foi acompanhado em oito cenários com condições iniciais diferentes. Os resultados obtidos foram comparados com dois modelos epidemiológicos e os resultados mostraram que a aplicação de CAs é adequada ao estudo da epidemiologia.

Das e Ray (2010), desenvolveram um algoritmo de cifragem e decifragem utilizando CA híbrido unidimensional programável em circuitos lógicos. Os autores utilizaram paralelização do código, o que trouxe melhor desempenho na execução do algoritmo.

Martins (2010), faz um estudo de alguns aspectos da dinâmica do crescimento cancerígeno por meio de um CA. Observou-se um comportamento periódico do número de células cancerígenas para alguns valores dos parâmetros, esse comportamento pode explicar tumores periódicos em que o crescimento não tem correlação à administração de tratamentos de quimioterapia.

Bogo, Gramani e Kaviski (2015), desenvolveram um modelo microscópico de tráfego de veículos com pista única baseado em CAs. O modelo apresenta bons resultados com poucas variáveis de calibração, também, é capaz de capturar as principais características físicas do tráfego de veículos como o fluxo, a densidade e a velocidade.

4.2 AUTÔMATO CELULAR DO TIPO GÁS EM REDE

Em 1986, Uriel Frisch, Brosl Hasslacher e Yves Pomeau, em sua grande descoberta, mostraram que o movimento molecular, ou atomístico, dentro dos fluidos, um assunto

extraordinariamente complexo envolvendo graus de liberdade da ordem de 10^{24} valores reais, não precisava ter um detalhamento nem sequer próximo do encontrado na dinâmica molecular para que pudesse reproduzir a dinâmica dos fluidos de uma forma realista. Eles mostraram que um fluido pode ser representado pelo movimento de partículas fictícias, todas com a mesma massa e movendo-se com a mesma velocidade em módulo. Além disso, estas velocidades são restritas a um conjunto finito. Para representar um fluido bidimensional são necessárias, somente, seis velocidades (ROTHMAN; ZALESKI, 1994).

Os CAs que fazem a simulação do comportamento de um gás são chamados de autômatos celulares do tipo gás em rede (LGCAs). Os LGCAs formam uma classe particular dos CAs. São desenvolvidos como um modelo microscópico simples, completamente independente, para um fluido baseado em partículas fictícias dispostas em um reticulado regular. Essas partículas movem-se de um nó (ou célula) para outro da malha com velocidades dadas pelas direções do reticulado. A colisão acontece quando mais de uma partícula chega no mesmo local. Os LGCAs têm a importante característica da conservação explícita da massa e da quantidade de movimento, algo muito desejável na simulação de problemas reais. Essa característica não ocorre nos CAs (ZHOU, 2004).

No ano de 1976, o modelo HPP foi desenvolvido por Jean Hardy, Oliver de Pazzis e Yves Pomeau. Este modelo faz parte da classe de LGCA, e tem como objetivo modelar fluidos através de CAs. Para isso, utilizam-se regras simples e estruturas que possibilitam a dinâmica de partículas. O HPP é o primeiro modelo discreto para simulação de escoamentos de fluidos, e é baseado em uma rede quadrada com quatro possibilidades de movimento (direções cardeais). A velocidade de uma partícula é um dos quatro vetores unitários $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, como pode ser visto na Figura 9. O modelo é bidimensional com velocidades e posições discretas, ou seja, uma partícula em um determinado nó se desloca para outro nó mais próximo em uma das quatro direções do reticulado. A colisão ocorre de forma que o número total de partículas e o momento total são conservados (CHOPARD; DROZ, 1998).

A configuração das partículas no modelo HPP, como observado na Figura 10, é condicionada por regras apropriadas de propagação e colisão (Figura 11). O conjunto $S = \{0, 1\}$ representa os estados possíveis das partículas, sendo “0” para ausência e “1” para presença.

Segundo Chopard e Masselot (1999), a evolução do sistema é frequentemente dividida nas etapas de colisão e propagação. Na etapa de colisão é especificado como as partículas que estão chegando em um mesmo nó do reticulado interagem e mudam suas trajetórias. O princípio da exclusão, limita a uma única partícula chegando em um local por uma dada direção de movimento, e em um determinado instante de tempo. Na etapa de propagação, cada partícula move-se para a célula vizinha mais próxima seguindo a sua direção de movimento. A Figura 11 mostra as etapas de colisão e propagação no HPP.

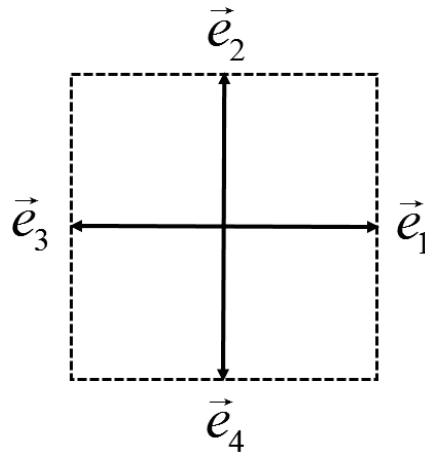


Figura 9 – Direções de movimento no reticulado do HPP

Fonte: Chopard e Droz (1998).

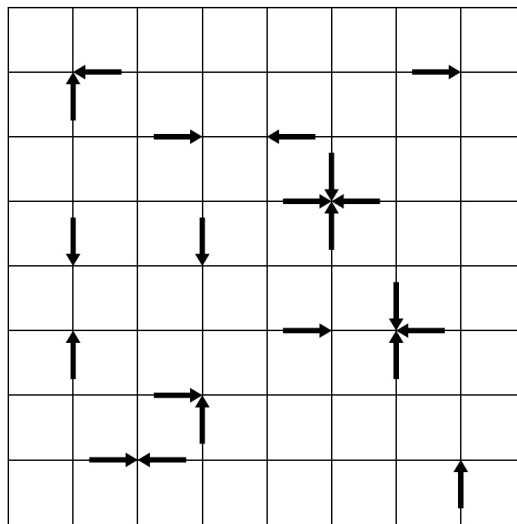


Figura 10 – Exemplo de configuração de partículas no modelo HPP

Fonte: Chopard e Masselot (1999).

Além do fato de que o HPP não recupera as equações de Navier-Stokes, o modelo não representa de forma precisa o comportamento de um gás, devido ao movimento das partículas ocorrerem em apenas quatro direções: norte, sul, leste e oeste. O que resulta em falta de isotropia ao modelo. Em 1986, foi proposto por Frisch, Haslacher e Pomeau, o modelo FHP, que como o HPP é um modelo bidimensional onde as partículas se movimentam em um espaço discreto e colidem umas com as outras. A principal diferença é que o FHP utiliza um reticulado hexagonal, tornando-o um modelo isotrópico e capaz de simular fluidos. A simetria do reticulado hexagonal tem um papel importante na recuperação das equações de Navier-Stokes (ZHOU, 2004).

Conforme Golbert (2009), o movimento das partículas no FHP acontece de forma similar ao modelo HPP. Inicialmente, não pode haver mais de uma partícula movendo-se na mesma direção em uma determinada célula (princípio da exclusão). Então, a cada passo de tempo, as partículas movem-se por uma unidade de reticulado e na direção de sua

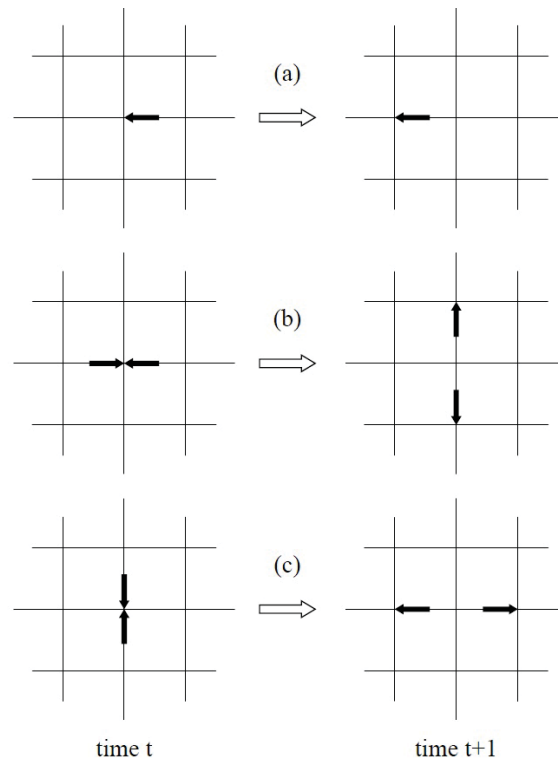


Figura 11 – A regra HPP: (a) Propagação, (b) e (c) Colisão
Fonte: Chopard e Masselot (1999).

velocidade, até a célula vizinha mais próxima. Por fim, há a colisão das partículas que chegam em uma mesma célula no mesmo passo de tempo. Na colisão, as velocidades das partículas podem ser alteradas conforme a velocidade de cada partícula e de acordo com a regra de colisão. Porém, não há alteração no número de partículas e nem na soma de suas velocidades. A Figura 12 ilustra a colisão e propagação no FHP para duas e três partículas.

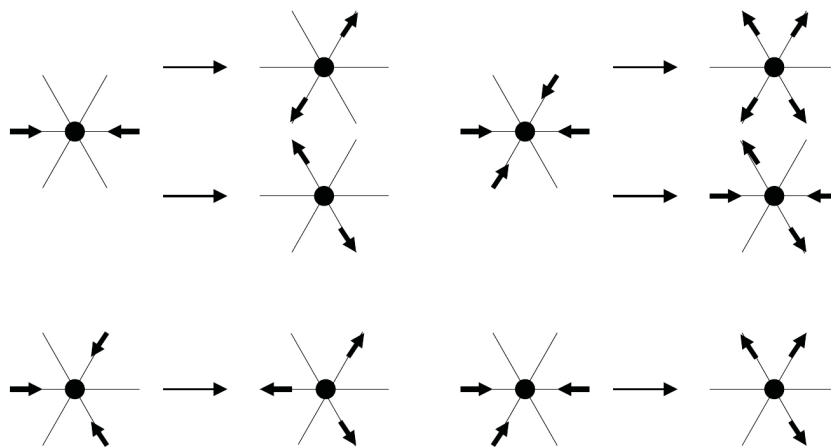


Figura 12 – Colisão e propagação no modelo FHP
Fonte: Schepke e Diverio (2006).

O modelo FHP representa uma abstração do fluido em escala microscópica, sua microdinâmica conserva o número de partículas e o momento após cada passo de tempo.

Assim, após a colisão é preservada a massa e a quantidade de movimento. A microdinâmica do FHP é dada por variáveis booleanas que descrevem a ocupação das partículas em cada célula do reticulado em cada passo de tempo, isto é, a presença ou ausência de uma partícula de fluido (CHOPARD; MASSELOT, 1999).

Uma equação de evolução para os números de ocupação expressa a microdinâmica completa do modelo FHP. Seja $n_\alpha(\vec{x}, t)$ o número de partículas entrando no nó \vec{x} no tempo t com velocidade na direção do vetor \vec{e}_α , $\alpha = 1, 2, \dots, 6$. O valor de n_α assume 0 para indicar a ausência, ou 1 para indicar a presença de partícula se deslocando na direção \vec{e}_α do reticulado. A Figura 13 mostra as seis direções do reticulado hexagonal. Os vetores de velocidades \vec{e}_α são dados por,

$$\vec{e}_\alpha = \left(\cos\left(\frac{2\pi\alpha}{6}\right), \sin\left(\frac{2\pi\alpha}{6}\right) \right). \quad (4.1)$$

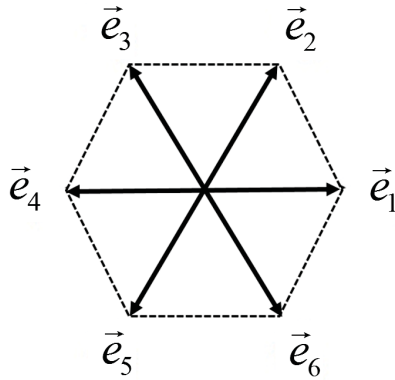


Figura 13 – Direções de movimento no reticulado do FHP

Fonte: Adaptado de Rothman e Zaleski (1994).

O deslocamento entre os nós do reticulado é definido por Δx e o passo de tempo por Δt .

Não havendo interações entre as partículas, a equação de evolução é dada por,

$$n_\alpha(\vec{x} + \vec{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = n_\alpha(\vec{x}, t). \quad (4.2)$$

A equação (4.2) expressa que uma partícula entrando no nó \vec{x} com velocidade ao longo de \vec{e}_α continuará em linha reta de modo que, no próximo passo de tempo, ela entrará no nó $\vec{x} + \vec{e}_\alpha \Delta t$ mantendo a mesma direção de movimento. Porém, quando há colisões, as partículas podem ter sua direção original alterada. Por exemplo, se duas partículas estão se movendo na mesma direção e em sentidos opostos para a posição \vec{x} , apenas n_α e $n_{\alpha+3}$ têm valor 1, e uma colisão ocorre, a partícula com velocidade \vec{e}_α terá sua velocidade modificada para $\vec{e}_{\alpha-1}$ ou $\vec{e}_{\alpha+1}$. A nova direção da partícula tem probabilidade 1/2 de ocorrer (CHOPARD; MASSELOT, 1999).

A Figura 14 ilustra a colisão de duas partículas quando $\alpha = 3$. Assim, a partícula com velocidade \vec{e}_3 assumirá a velocidade \vec{e}_2 ou \vec{e}_4 e a partícula com velocidade \vec{e}_6 assumirá \vec{e}_5 ou \vec{e}_1 . O índice α varia de $1, 2, \dots, 6$, se $\alpha = 6$, $\alpha + 1 = 1$ para manter o ciclo das direções do reticulado.

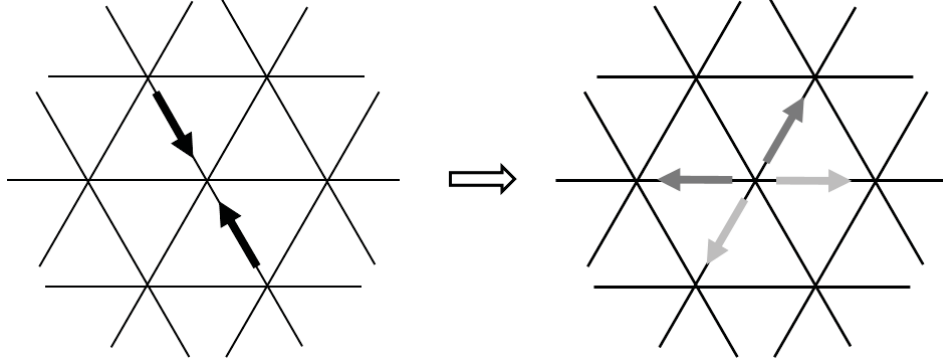


Figura 14 – Colisão de duas partículas no modelo FHP

Fonte: Adaptado de Chopard e Droz (1998).

A microdinâmica mais ampla de um LGCA é escrita da forma,

$$n_\alpha(\vec{x} + \vec{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = n_\alpha(\vec{x}, t) + \Omega_\alpha(n(\vec{x}, t)). \quad (4.3)$$

O termo Ω_α nas equações (4.3) e (4.4) é chamado de termo de colisão, que no modelo FHP é definido de forma a reproduzir as colisões. A variável $s(\vec{x}, t)$ é uma variável booleana randômica.

$$\Omega_\alpha(n) = -D_\alpha + sD_{\alpha-1} + (1-s)D_{\alpha+1} - T_\alpha + T_{\alpha+3}. \quad (4.4)$$

A expressão D_α na equação (4.5), indica que haverá uma colisão na direção α , na posição \vec{x} , se $D_\alpha = 1$. Isto pode ser verificado olhando para a Figura 14, em que o valor de $n_\alpha = n_3 = 1$ e $n_{\alpha+3} = n_6 = 1$, portanto $n_\alpha n_{\alpha+3}$ terá valor 1. Considerando que não existam partículas nas outras direções, tem-se que $D_\alpha = 1$. E o número de partículas que vão permanecer na direção de \vec{e}_α após a colisão de duas partículas nessa direção é dado por $n_\alpha - D_\alpha$.

$$D_\alpha = n_\alpha n_{\alpha+3} (1 - n_{\alpha+1}) (1 - n_{\alpha+2}) (1 - n_{\alpha+4}) (1 - n_{\alpha+5}). \quad (4.5)$$

Segundo Chopard e Masselot (1999), quando $n_\alpha = 0$, uma nova partícula pode aparecer na direção \vec{e}_α como resultado da colisão entre $n_{\alpha+1}$ e $n_{\alpha+4}$ ou a colisão entre $n_{\alpha-1}$ e $n_{\alpha+2}$. Na colisão de duas partículas, uma variável booleana randômica $s(\vec{x}, t)$ é definida

para determinar se as partículas são refletidas para a direita, $s = 1$, ou para a esquerda, $s = 0$. Dessa forma, o número de partículas criadas na direção de \vec{e}_α é dado por,

$$sD_{\alpha-1} + (1-s)D_{\alpha+1}. \quad (4.6)$$

Também pode haver a colisão entre três partículas entrando na mesma posição em um instante de tempo t . A equação (4.7) fornece a ocorrência de colisão entre as partículas que se movem nas direções de \vec{e}_α , $\vec{e}_{\alpha+2}$ e $\vec{e}_{\alpha+4}$. E a expressão $n_\alpha - T_\alpha + T_{\alpha+3}$ representa o número de partículas na direção de \vec{e}_α depois da colisão.

$$T_\alpha = n_\alpha n_{\alpha+2} n_{\alpha+4} (1 - n_{\alpha+1}) (1 - n_{\alpha+3}) (1 - n_{\alpha+5}). \quad (4.7)$$

Substituindo as expressões completas de D_α e T_α na equação (4.4), tem-se a forma geral do termo de colisão entre duas e três partículas,

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha(n) = & -n_\alpha n_{\alpha+2} n_{\alpha+4} (1 - n_{\alpha+1}) (1 - n_{\alpha+3}) (1 - n_{\alpha+5}) \\ & + n_{\alpha+1} n_{\alpha+3} n_{\alpha+5} (1 - n_\alpha) (1 - n_{\alpha+2}) (1 - n_{\alpha+4}) \\ & + n_\alpha n_{\alpha+3} (1 - n_{\alpha+1}) (1 - n_{\alpha+2}) (1 - n_{\alpha+4}) (1 - n_{\alpha+5}) \\ & + (1-s) n_{\alpha+1} n_{\alpha+4} (1 - n_\alpha) (1 - n_{\alpha+2}) (1 - n_{\alpha+3}) (1 - n_{\alpha+5}) \\ & + s n_{\alpha+2} n_{\alpha+5} (1 - n_\alpha) (1 - n_{\alpha+1}) (1 - n_{\alpha+3}) (1 - n_{\alpha+4}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Operadores de colisão mais eficientes podem ser criados pela inclusão da colisão entre quatro partículas. Existem variantes do modelo FHP, tais como FHP-II e o FHP-III, que dispõem de um conjunto mais completo de colisões, e da inclusão de uma partícula em repouso. Alterações ajudam na melhor simulação de fluidos, porém o operador de colisão deve manter a conservação de massa e a quantidade de movimento das partículas.

Conforme Chopard e Masselot (1999), as quantidades de interesse em um LGCA não são as variáveis booleanas n_α , mas sim as quantidades macroscópicas que são determinadas por valores médios, tais como a densidade e a velocidade das partículas em cada ponto do sistema. Seja $N_\alpha(\vec{x}, t) = \langle n_\alpha(\vec{x}, t) \rangle$ a média amostral das variáveis microscópicas de ocupação. A distribuição $N_\alpha(\vec{x}, t)$ também representa a probabilidade da entrada de uma partícula na posição \vec{x} , no instante de tempo t , e com velocidade \vec{e}_α . Essa distribuição possui variável contínua que varia no intervalo $[0, 1]$. Pela definição usual da mecânica estatística, a densidade local das partículas é a soma da média das partículas que se movem em cada direção \vec{e}_α ,

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_\alpha N_\alpha(\vec{x}, t), \quad \alpha = 1, 2, \dots, l. \quad (4.9)$$

em que l é o número de direções do reticulado.

Do mesmo modo, a velocidade do fluido é obtida pela expressão do momento linear ou quantidade de movimento,

$$\rho(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha} N_{\alpha}(\vec{x}, t), \quad \alpha = 1, 2, \dots, l. \quad (4.10)$$

No processo de colisão o número de partículas e o momento são conservados, isto é, há a conservação de massa e da quantidade de movimento. Para isso, impõe-se ao operador de colisão Ω_{α} a condição para conservação de massa,

$$\sum_{\alpha} \Omega_{\alpha}(\vec{n}) = 0, \quad (4.11)$$

e a condição para conservação da quantidade de movimento do fluido,

$$\sum_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \Omega_{\alpha}(\vec{n}) = 0. \quad (4.12)$$

Para obter a equação do balanço de massa, se procede com a soma da equação do movimento (4.3) em α , e usando (4.11) chega-se em,

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha}(\vec{x} + \vec{e}_{\alpha} \Delta t, t + \Delta t) = \sum_{\alpha} n_{\alpha}(\vec{x}, t), \quad \alpha = 1, 2, \dots, l, \quad (4.13)$$

e a equação do balanço da quantidade de movimento para cada célula é obtida somando (4.3) multiplicada por \vec{e}_{α} em α , e usando a equação (4.12) tem-se,

$$\sum_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} n_{\alpha}(\vec{x} + \vec{e}_{\alpha} \Delta t, t + \Delta t) = \sum_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} n_{\alpha}(\vec{x}, t), \quad \alpha = 1, 2, \dots, l. \quad (4.14)$$

De acordo com McNamara e Alder (1993), o LGCA surgiu como uma alternativa aos métodos tradicionais para resolver numericamente as equações de Navier Stokes, com a vantagem de estabilidade numérica juntamente com simplicidade de implementação computacional. Porém, o LGCA apresenta ruído estatístico (erro de medição devido ao uso de quantidades booleanas) e a falta de eficiência para elevados números de Reynolds. Em resposta as limitações do LGCA, surgiu o LBM, originalmente derivado do LGCA, que permite simular problemas com elevados números de Reynolds, com eficiência computacional e também com bons resultados quando comparado a métodos tradicionais.

O LBM é indicado para problemas onde se deseja obter eficiência e simplicidade de programação, uma vez que o mesmo se apresenta como um método discreto e especificamente elaborado para o cálculo computacional. Através do método é possível abordar e tratar condições de contorno irregulares, incorporar as forças mesoscópicas responsáveis

pelas transições de fase, bem como outras questões difíceis de serem descritas sem o uso de uma abordagem contínua (SCHEPKE; DIVERIO, 2006).

5 MÉTODO DO RETICULADO DE BOLTZMANN PARA ÁGUAS RASAS

Neste capítulo, encontram-se as características que fazem parte do método do reticulado de Boltzmann. A teoria do LBM será apresentada de forma que as aplicações descritas no capítulo 8 possam ser reproduzidas, auxiliando assim, pesquisas futuras.

O capítulo está dividido em três seções para maior clareza das informações. Na primeira seção, apresentam-se as características necessárias para a aplicação do LBM, com operador de colisão BGK, em problemas governados pelas equações de águas rasas. Na segunda seção, descreve-se a caracterização do LBM com operador de colisão MRT. A abordagem da turbulência no LBM é apresentada na terceira seção.

5.1 LBM COM OPERADOR DE COLISÃO BGK

De acordo com Amati, Succi e Benzi (1997), o método do reticulado de Boltzmann surgiu no final dos anos 1980 para lidar com alguns inconvenientes provenientes da utilização do autômato celular do tipo gás em rede em simulações numéricas.

Em McNamara e Zanetti (1988), tem-se o primeiro estudo que utiliza o LBM como uma técnica alternativa ao LGCA no estudo de propriedades hidrodinâmicas. Essa técnica permite fazer uma abordagem numérica da equação de Navier-Stokes. A proposta é modelar o gás em rede com a equação do reticulado de Boltzmann, esta abordagem oferece pontos positivos como a eliminação do ruído estatístico que está presente nas simulações com o LGCA, além de compartilhar muitas características do LGCA. Porém, o LBM não herda somente boas características do LGCA, herda também alguns problemas e perde a eficiência computacional.

Inicialmente o LBM fazia uso do mesmo operador de colisão utilizado no LGCA, apresentando um custo computacional elevado (SIEBERT, 2007). Consequentemente, a teoria do LBM dependia da teoria do LGCA. De acordo com Surmas (2010), mais tarde estabeleceu-se uma conexão entre a teoria cinética e o LBM. Esta conexão permitiu o uso de um operador de colisão mais simples e muito eficiente, o BGK, fazendo com que o LBM ganhasse destaque.

A aproximação BGK, simplificação muito utilizada do operador de colisão, utiliza um termo de relaxamento em direção ao equilíbrio local e foi proposta por Higuera e Jiménez (1989). De forma independente, esta versão também foi proposta por outros pesquisadores Qian (1990) e Chen et al. (1991). O uso do método do reticulado de Boltzmann com a simplificação BGK para o operador de colisão permite cálculos computacionais mais eficientes e evita-se ter que resolver equações cinéticas complexas como a equação de Boltzmann na sua forma mais complexa (CHEN; DOOLEN, 1998).

O LBM pode ser considerado um método numérico eficiente para a dinâmica de fluidos computacional (CHEN; DOOLEN, 1998). É também uma ferramenta poderosa para a modelagem de novos fenômenos físicos que ainda não são facilmente descritos por equações macroscópicas. Os pesquisadores Nourgaliev et al. (2003) e Zhao et al. (2013), mostraram que o LBM é uma técnica poderosa para simular uma grande variedade de problemas complexos em dinâmica de fluidos. Nos últimos anos, o LBM provou ser uma alternativa viável aos métodos numéricos tradicionais, com base na solução de equações de Navier-Stokes. Entre as razões de sua crescente popularidade destacam-se a sua simplicidade, facilidade de implementação e paralelismo de seu algoritmo. Além das observações anteriores, o LBM possui outros pontos importantes que deve-se considerar. Com relação ao operador de convecção (ou processo de propagação) do LBM no espaço de fase, Chen e Doolen (1998) afirmam que ele é linear e que esta característica é proveniente da teoria cinética.

De acordo com Chen e Doolen (1998), o LBM é um esquema numérico baseado em equações cinéticas formuladas em uma escala mesoscópica que simula a dinâmica do fluido em uma escala macroscópica. A dinâmica deste método é dada pela equação do reticulado de Boltzmann, a qual mostra como ocorrem as distribuições das micropartículas. Quando compara-se a equação do LBM com a equação do LGCA, percebe-se a familiaridade entre elas. Isto porque a equação do LBM é oriunda da equação governante do esquema LGCA, fazendo a substituição das variáveis booleanas de ocupação de partículas n_α , presentes na equação do LGCA, pelas funções reais de distribuição de partículas $f_\alpha = \langle n_\alpha \rangle$, onde $\langle \cdot \rangle$ representa uma média por amostra, negligenciando o movimento individual das partículas.

É possível obter o LBM a partir da teoria dos autômatos celulares do tipo gás em rede e também a partir da teoria cinética. Nesta tese, optou-se por obter a equação do LBM a partir da teoria dos LGCA's. Neste sentido, obtém-se a equação do LBM a partir da equação do LGCA, substituindo a função booleana de ocupação de partículas por uma função contínua de distribuição de partículas.

5.1.1 Equação do Reticulado de Boltzmann

A equação do reticulado de Boltzmann (LBE) pode ser obtida por dois caminhos distintos. O primeiro deles, é obter a LBE a partir da equação dos autômatos celulares do tipo gás em rede, conforme estudo de Rothman (2004). Por outro lado, pode-se também obter a LBE a partir da teoria cinética, como pode ser visto em Abe (1997).

Nesta tese, a LBE é obtida a partir da teoria dos LGCA's e algumas contribuições da teoria cinética serão utilizadas, como por exemplo, o operador de colisão BGK. Este operador foi incorporado a equação do reticulado de Boltzmann, conforme descrito por Chen et al. (1991).

A dinâmica do LBM está inserida na mesoescala, onde o movimento das partículas

não é mais observado de forma individual, como na microescala, mas sim por médias calculadas em regiões do reticulado. O cálculo das variáveis de interesse por meio de médias é mais eficiente do que a dinâmica booleana. O operador de colisão que no LGCA depende de variáveis booleanas, no LBM passa a ser escrito em termos da distribuição f_α de valores reais. A função distribuição de partículas f_α é dada por $f_\alpha = \langle n_\alpha \rangle$, negligenciando o movimento individual das partículas. Desta forma, há grande redução do ruído estatístico, pois assume-se que estas médias são feitas de forma que os valores de f_α variem suavemente tanto no espaço quanto no tempo (GOLBERT, 2009).

Considerando o cálculo de médias na equação (4.3) de evolução do LGCA, tem-se,

$$f_\alpha(\vec{x} + \vec{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = f_\alpha(\vec{x}, t) + \langle \Omega_\alpha(n) \rangle, \quad (5.1)$$

em que $\langle \Omega_\alpha(n) \rangle$ representa o cálculo de valores médios sobre o termo de colisão. Este cálculo se torna complexo, pois é necessário obter a média de uma série de produtos na equação geral do termo de colisão do LGCA, equação (4.8). Então, de acordo com Chopard e Masselot (1999), considera-se a suposição de Boltzmann, em que f_α e f_λ não são correlacionados se $\alpha \neq \lambda$ e a aproximação de $\langle \Omega_\alpha(n) \rangle$ por $\Omega_\alpha(f)$ com todas as variáveis booleanas substituídas pelos seus valores médios. Assim, substitui-se o cálculo da média das colisões por um operador aplicado ao cálculo da média da distribuição de micropartículas, deixando o operador de colisão mais simplificado. Substituindo $\Omega_\alpha(f)$ na equação (5.1), tem-se a equação do método do reticulado de Boltzmann,

$$f_\alpha(\vec{x} + \vec{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = f_\alpha(\vec{x}, t) + \Omega_\alpha(f). \quad (5.2)$$

Por ser originalmente criado a partir do LGCA, utilizou-se, inicialmente, no LBM o mesmo operador de colisão utilizado no LGCA. Porém, este operador não é de simples aplicação e nem eficiente. Alguns anos depois, Chen et al. (1991), observaram a conexão entre a teoria cinética e a equação do reticulado de Boltzmann, e utilizaram o operador BGK para substituir o operador de colisão do LGCA. O operador BGK é discretizado para ser aplicado em um conjunto finito de velocidades das partículas no reticulado. Deste modo, substitui-se o termo $\Omega_\alpha(f)$ presente em (5.2), pelo operador de colisão BGK, que possui a seguinte forma,

$$\Omega_\alpha(f) = -\frac{1}{\tau} [f_\alpha(\vec{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\vec{x}, t)], \quad (5.3)$$

onde τ é o parâmetro de relaxamento e f_α^{eq} é a função distribuição de equilíbrio, que é construída conforme as equações macroscópicas governantes do problema. Ela será apresentada na seção 5.1.2 para as equações de águas rasas bidimensionais.

Portanto, a equação do LBM com operador de colisão BGK é dada por,

$$f_\alpha(\vec{x} + \vec{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\tau} [f_\alpha(\vec{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\vec{x}, t)], \quad \alpha = 0, \dots, l-1, \quad (5.4)$$

com a consideração de que o reticulado utilizado tem partícula em repouso com velocidade nula, assim α varia de zero a $l-1$.

De acordo com Zhou (2004), para capturar de forma mais eficiente as características de um escoamento governado pelas equações de águas rasas, acrescenta-se em (5.4) uma força de corpo, Z_α . Portanto, (5.4) torna-se,

$$f_\alpha(\vec{x} + \vec{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\tau} [f_\alpha(\vec{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\vec{x}, t)] + \Delta t Z_\alpha, \quad (5.5)$$

em que Z_α tem a seguinte forma,

$$Z_\alpha = \frac{1}{N e^2} e_{\alpha i} F_i, \quad (5.6)$$

onde,

$e = \Delta x / \Delta t$ é a velocidade no reticulado, Δx é o espaçamento da malha e Δt é o incremento no tempo;

$e_{\alpha i}$ representa a componente do vetor \vec{e}_α na direção i .

$N = \frac{1}{e^2} \sum_\alpha e_{\alpha i} e_{\alpha i}$ é uma constante estabelecida de acordo com o reticulado escolhido.

Nesta tese foram desconsiderados o atrito com o vento e o efeito de Coriolis, resultando em um termo de força da forma,

$$F_i = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x_i} - \frac{\tau_{bi}}{\rho}. \quad (5.7)$$

Assim, (5.5) assume a forma,

$$f_\alpha(\vec{x} + \vec{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\tau} [f_\alpha(\vec{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\vec{x}, t)] + \frac{\Delta t}{N e^2} e_{\alpha i} F_i. \quad (5.8)$$

A equação (5.8) descreve a colisão e a propagação de distribuições contínuas de partículas. Pode-se separá-la nas etapas de colisão,

$$f_\alpha^C(\vec{x}, t) = f_\alpha(\vec{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_\alpha(\vec{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\vec{x}, t)], \quad (5.9)$$

e propagação,

$$f_{\alpha}(\vec{x} + \vec{e}_{\alpha}\Delta t, t + \Delta t) = f_{\alpha}^C(\vec{x}, t) + \frac{\Delta t}{Ne^2} e_{\alpha i} F_i. \quad (5.10)$$

Estabelecida a LBE com termo de força, escolhe-se o reticulado para representar os pontos da malha e determinar as direções de movimento das partículas. Inicialmente os reticulados utilizados nas simulações foram definidos para aplicações em problemas de duas e três dimensões. Somente mais tarde foram apresentados reticulados unidimensionais (WEI et al., 2004).

A representação dos pontos na malha é feita de forma semelhante a dos métodos numéricos tradicionais. As direções finitas e determinadas para o movimento das partículas definem um modelo microscópico para a dinâmica molecular (ZHOU, 2004).

Na escolha do reticulado a ser utilizado é essencial observar a sua simetria. O espaço discreto de velocidades deve ser adequado para representar os fenômenos do problema, mantendo o momento angular e sem haver uma direção preferencial para o movimento das partículas. A simetria é necessária para que o reticulado possa representar as equações de Navier-Stokes (FRISCH; HASSLACHER; POMEAU, 1986).

Na literatura são encontrados vários modelos de reticulados. Em Qian, D'Humières e Lallemand (1992), encontra-se uma família de reticulados denominada $DnQm$, onde n indica o espaço n -dimensional onde está inserido o reticulado e m as direções de movimento para as distribuições de partículas, podendo ser considerada a possibilidade de partícula parada ou velocidade nula.

Com a notação $DnQm$, o modelo HPP utiliza o reticulado quadrado D2Q5, ou seja, o reticulado é bidimensional com 4 direções de velocidades não nulas e uma direção com velocidade nula. O modelo FHP utiliza o reticulado hexagonal D2Q7, também bidimensional o reticulado têm 6 direções de velocidades não nulas e uma direção para partícula parada. Há uma grande variedade de pesquisas na literatura que utilizam os modelos D2Q9 e D1Q3.

Segundo Chopard e Masselot (1999), o modelo D2Q9 é utilizado em situações bidimensionais, o reticulado é quadrado ($\Delta x = \Delta y$), possui nove direções de movimento indicadas por \vec{e}_{α} . A nona direção, com índice $\alpha = 0$, é definida para descrever uma população $f_0(\vec{x}, t)$ de partículas em repouso, isto é, com velocidade nula. A Figura 15 ilustra o modelo em uma malha retangular com suas possíveis direções de movimento.

No modelo D2Q9 existem duas velocidades para as partículas, conforme sua direção de movimento. Nas direções cardeais (1, 3, 5, 7), o módulo da velocidade é dado por $e = \Delta x / \Delta t$, e nas direções colaterais (2, 4, 6, 8) tem-se a velocidade com módulo $e\sqrt{2}$. Isto ocorre devido às distribuições das partículas percorrerem distâncias diferentes em

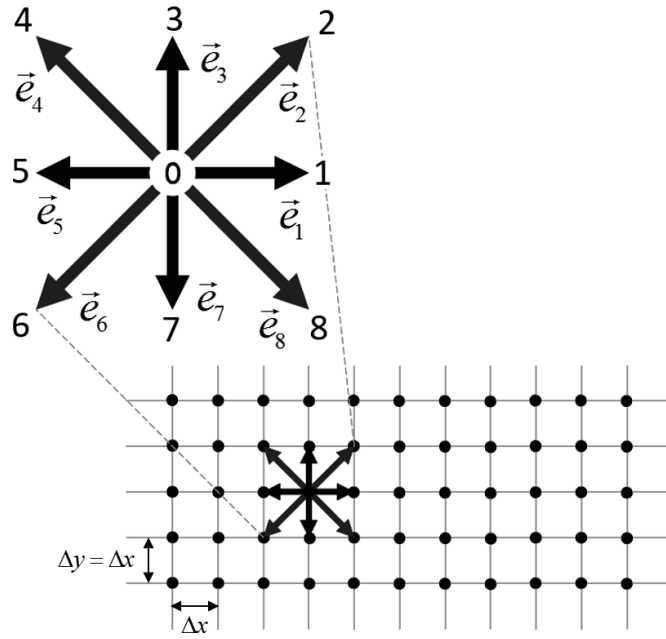


Figura 15 – Modelo de reticulado D2Q9 em uma malha retangular

Fonte: Sukop e Thorne (2006).

um mesmo intervalo de tempo. Assim, os vetores de velocidades são definidos por (ZHOU, 2004),

$$\vec{e}_\alpha = \begin{cases} (0, 0) & \text{se } \alpha = 0, \\ e \left(\cos \frac{(\alpha-1)\pi}{4}, \sin \frac{(\alpha-1)\pi}{4} \right) & \text{se } \alpha = 1, 3, 5, 7, \\ e\sqrt{2} \left(\cos \frac{(\alpha-1)\pi}{4}, \sin \frac{(\alpha-1)\pi}{4} \right) & \text{se } \alpha = 2, 4, 6, 8. \end{cases} \quad (5.11)$$

Considerando o reticulado D2Q9, tem-se de (5.6), que $N = 6$. Assim, a LBE fica reescrita como,

$$f_\alpha(\vec{x} + \vec{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\tau} [f_\alpha(\vec{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\vec{x}, t)] + \frac{\Delta t}{6e^2} e_{\alpha i} F_i. \quad (5.12)$$

A equação do reticulado de Boltzmann apresentada em (5.12) está descrita de forma a incorporar as características de escoamentos governados pelas equações de águas rasas. Dependendo das equações macroscópicas governantes a LBE pode apresentar modificações, geralmente no termo de força. Por exemplo, Golbert (2013), não utiliza o termo de força na LBE para recuperar as equações de Navier-Stokes na simulação de problemas de hemodinâmica, e Zhang, Feng e Yang (2015), simulam problemas governados pelo modelo onda cinemática, onde a LBE tem um termo de força diferente do apresentado para águas rasas definido anteriormente.

Além da LBE e do reticulado, outro elemento necessário para aplicação do LBM é função distribuição de equilíbrio, a qual é estabelecida na seção seguinte.

5.1.2 Função Distribuição de Equilíbrio para Águas Rasas e Variáveis Macroscópicas

Na seção 5.1.1, foi estabelecida a equação governante do método do reticulado de Boltzmann, equação (5.8). Nesta seção apresenta-se, de forma resumida, a construção da função distribuição de equilíbrio.

A função distribuição de equilíbrio (f_α^{eq}) para águas rasas é obtida por meio de uma expansão em série de potências na velocidade macroscópica do fluido (ROTHMAN, 2004),

$$f_\alpha^{eq} = A_\alpha + B_\alpha e_{\alpha i} u_i + C_\alpha e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j + D_\alpha u_i u_i, \quad (5.13)$$

onde A_α , B_α , C_α e D_α são constantes.

Considerando o reticulado D2Q9, pela sua simetria deve ocorrer,

$$A_1 = A_3 = A_5 = A_7 = \bar{A}, \quad A_2 = A_4 = A_6 = A_8 = \tilde{A}, \quad (5.14)$$

$$B_1 = B_3 = B_5 = B_7 = \bar{B}, \quad B_2 = B_4 = B_6 = B_8 = \tilde{B}, \quad (5.15)$$

$$C_1 = C_3 = C_5 = C_7 = \bar{C}, \quad C_2 = C_4 = C_6 = C_8 = \tilde{C}, \quad (5.16)$$

$$D_1 = D_3 = D_5 = D_7 = \bar{D} \quad e \quad D_2 = D_4 = D_6 = D_8 = \tilde{D}. \quad (5.17)$$

Pode-se então reescrever (5.13) na seguinte forma,

$$f_\alpha^{eq} = \begin{cases} A_0 + D_0 u_i u_i & \text{se } \alpha = 0, \\ \bar{A} + \bar{B} e_{\alpha i} u_i + \bar{C} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j + \bar{D} u_i u_i & \text{se } \alpha = 1, 3, 5, 7, \\ \tilde{A} + \tilde{B} e_{\alpha i} u_i + \tilde{C} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j + \tilde{D} u_i u_i & \text{se } \alpha = 2, 4, 6, 8. \end{cases} \quad (5.18)$$

As constantes em (5.18) são determinadas levando em consideração as restrições sobre a função distribuição de equilíbrio local, ou seja, devem obedecer as relações de conservação da massa e quantidade de movimento. Para as equações de águas rasas, a função de distribuição de equilíbrio deve satisfazer as três seguintes condições (ZHOU, 2004),

$$\sum_\alpha f_\alpha^{eq}(\vec{x}, t) = h(\vec{x}, t), \quad (5.19)$$

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha i} f_{\alpha}^{eq}(\vec{x}, t) = h(\vec{x}, t) u_i(\vec{x}, t), \quad (5.20)$$

e

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} f_{\alpha}^{eq}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} g h^2(\vec{x}, t) \delta_{ij} + h(\vec{x}, t) u_i(\vec{x}, t) u_j(\vec{x}, t), \quad (5.21)$$

em que δ_{ij} é a função delta de Kronecker, definida por,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j, \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (5.22)$$

A função distribuição de equilíbrio (5.18) é construída de acordo com as restrições (5.19), (5.20) e (5.21). Com isso, por meio da LBE (5.12) determina-se a solução para as equações de águas rasas bidimensionais. A prova deste resultado e a determinação das constantes na função distribuição de equilíbrio podem ser encontrados em Zhou (2004). Estas constantes são representadas por,

$$A_0 = h - \frac{5gh^2}{6e^2}, \quad D_0 = -\frac{2h}{3e^2}, \quad (5.23)$$

$$\bar{A} = \frac{gh^2}{6e^2}, \quad \bar{B} = \frac{h}{3e^2}, \quad \bar{C} = \frac{h}{2e^4}, \quad \bar{D} = -\frac{h}{6e^2}, \quad (5.24)$$

$$\tilde{A} = \frac{gh^2}{24e^2}, \quad \tilde{B} = \frac{h}{12e^2}, \quad \tilde{C} = \frac{h}{8e^4}, \quad \tilde{D} = -\frac{h}{24e^2}. \quad (5.25)$$

Substituindo os valores das constantes na equação (5.18), obtém-se a função distribuição de equilíbrio,

$$f_{\alpha}^{eq} = \begin{cases} h - \frac{5gh^2}{6e^2} - \frac{2h}{3e^2} u_i u_i & \text{se } \alpha = 0, \\ \frac{gh^2}{6e^2} + \frac{h}{3e^2} e_{\alpha i} u_i + \frac{h}{2e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \frac{h}{6e^2} u_i u_i & \text{se } \alpha = 1, 3, 5, 7, \\ \frac{gh^2}{24e^2} + \frac{h}{12e^2} e_{\alpha i} u_i + \frac{h}{8e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \frac{h}{24e^2} u_i u_i & \text{se } \alpha = 2, 4, 6, 8. \end{cases} \quad (5.26)$$

que juntamente com a LBE (5.12), recuperam as equações de águas rasas.

Busca-se determinar, com o auxílio da LBE (5.12) e da função distribuição de equilíbrio (5.26), as quantidades físicas de interesse, a altura e a velocidade da água. Estas variáveis macroscópicas também serão determinadas de forma a recuperar as equações de águas rasas (PENG, 2012).

Tomando a soma de momento zero da função distribuição em (5.12), tem-se que (ZHOU, 2004),

$$\sum_{\alpha} [f_{\alpha}(\vec{x} + \vec{e}_{\alpha}\Delta t, t + \Delta t) - f_{\alpha}(\vec{x}, t)] = -\frac{1}{\tau} \sum_{\alpha} (f_{\alpha} - f_{\alpha}^{eq}) + \frac{\Delta t}{6e^2} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} F_i(\vec{x}, t). \quad (5.27)$$

As componentes dos vetores de velocidades são simétricas, dessa forma $\sum_{\alpha} e_{\alpha i} F_i(\vec{x}, t) = 0$ em (5.27), assim,

$$\sum_{\alpha} [f_{\alpha}(\vec{x} + \vec{e}_{\alpha}\Delta t, t + \Delta t) - f_{\alpha}(\vec{x}, t)] = -\frac{1}{\tau} \sum_{\alpha} (f_{\alpha} - f_{\alpha}^{eq}). \quad (5.28)$$

A propriedade de conservação deve ser imposta ao LBM. No caso da conservação da massa, observa-se a restrição (5.29), que é a equação da continuidade com variáveis microdinâmicas,

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha}(\vec{x} + \vec{e}_{\alpha}\Delta t, t + \Delta t) \equiv \sum_{\alpha} f_{\alpha}(\vec{x}, t). \quad (5.29)$$

Substituindo (5.29) em (5.28), obtém-se,

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha}(\vec{x}, t) \equiv \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{eq}(\vec{x}, t). \quad (5.30)$$

Comparando (5.19) com (5.30), tem-se a definição da quantidade física, profundidade da água,

$$h(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(\vec{x}, t). \quad (5.31)$$

Para definir a velocidade do fluido, toma-se a soma do primeiro momento da função distribuição em (5.12) para obter (ZHOU, 2004),

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} [f_{\alpha}(\vec{x} + \vec{e}_{\alpha}\Delta t, t + \Delta t) - f_{\alpha}(\vec{x}, t)] &= -\frac{1}{\tau} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} (f_{\alpha} - f_{\alpha}^{eq}) + \\ &\quad \frac{\Delta t}{6e^2} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} F_j(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Usando o fato de que $\sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} = 6e^2 \delta_{ij}$, a expressão em (5.32) é simplificada e reescrita na forma apresentada em (5.33). Esta reflete a evolução da quantidade de movimento acumulado na função distribuição,

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha i} [f_{\alpha}(\vec{x} + \vec{e}_{\alpha}\Delta t, t + \Delta t) - f_{\alpha}(\vec{x}, t)] = -\frac{1}{\tau} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} (f_{\alpha} - f_{\alpha}^{eq}) + \Delta t F_i(\vec{x}, t). \quad (5.33)$$

No caso da conservação da quantidade de movimento, é necessário satisfazer a seguinte identidade,

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha i} [f_{\alpha}(\vec{x} + \vec{e}_{\alpha} \Delta t, t + \Delta t) - f_{\alpha}(\vec{x}, t)] \equiv \Delta t F_i(\vec{x}, t). \quad (5.34)$$

A identidade (5.34) é a equação que representa a segunda lei de Newton.

Substituindo (5.34) em (5.33), e comparando o resultado com (5.20) obtém-se (5.35), que fornece a velocidade do escoamento da água,

$$u_i(\vec{x}, t) = \frac{1}{h(\vec{x}, t)} \sum_{\alpha} e_{\alpha i} f_{\alpha}(\vec{x}, t). \quad (5.35)$$

É possível provar que a profundidade e a velocidade da água calculadas a partir das expressões (5.31) e (5.35), são a solução para as equações de águas rasas (ZHOU, 2004).

5.1.3 Estabilidade

A estabilidade é uma propriedade relacionada com o esquema numérico utilizado na solução ao longo do tempo. Um método numérico é dito estável se pequenas perturbações nos dados de entrada provocam pequenas perturbações nos resultados finais. Se isso não ocorre, o método é dito instável. A estabilidade fornece informações a respeito da sensibilidade do método aos erros de truncamento que tendem a ocorrer na medida em que o processo de cálculo avança no tempo (CUNHA, 2000). Por conta da diversidade de maneiras pelas quais os métodos numéricos são originados, é preciso considerar uma variedade de condições para qualificar sua precisão (BURDEN; FAIRES, 2008).

Em Sterling e Chen (1996), é feita uma análise de estabilidade de perturbações de populações de partículas linearizadas sobre valores de equilíbrio que correspondem a um fluxo uniforme de densidade constante. A estabilidade linear depende de um espaço muito grande de parâmetros, o que impede a caracterização completa da estabilidade. Alguns resultados são obtidos para os modelos D2Q7, D2Q9, e também para um modelo tridimensional. Os resultados comuns aos três modelos foram: (a) o tempo de relaxamento deve satisfazer a restrição $\tau > 1/2$; (b) deve haver uma máxima velocidade média estável para valores fixos de outros parâmetros; (c) aumentando o valor de τ a partir de $1/2$, a velocidade máxima estável cresce monotonicamente até um valor fixo da velocidade, a qual não é alterada para maiores valores de τ .

O LBM é um método numérico explícito (LUO, 2000) e, portanto, é condicionalmente estável. Conforme Zhou (2004), em teoria, geralmente as condições para que ocorra estabilidade não são conhecidas. Porém, na prática, cálculos demonstram que o método pode ser estável se cumprir algumas condições. A primeira destas condições é que se o

problema representa o escoamento de água, deve haver o fenômeno de difusão. Sendo a viscosidade cinemática ν um valor positivo, essa condição implica que,

$$\nu = \frac{e^2 \Delta t}{6} (2\tau - 1) > 0, \quad (5.36)$$

resultando em,

$$\tau > 1/2. \quad (5.37)$$

A equação (5.36) é obtida em He e Luo (1997b) por meio da expansão de Chapman-Enskog aplicada na derivação das equações de Navier-Stokes. Essa equação, relaciona a viscosidade cinemática, que é uma propriedade do fluido, com o parâmetro de relaxamento τ , e pode ser escrita da forma,

$$\tau = \frac{3\nu}{e^2 \Delta t} + \frac{1}{2}. \quad (5.38)$$

O módulo da velocidade resultante é menor do que a velocidade no reticulado,

$$\frac{|\vec{u}|^2}{e^2} < 1, \quad (5.39)$$

com celeridade satisfazendo,

$$\frac{gh}{e^2} < 1. \quad (5.40)$$

Por fim, o método do reticulado de Boltzmann é limitado a escoamentos com baixa velocidade, o que leva a seguinte restrição sobre o método,

$$\frac{|\vec{u}|}{\sqrt{gh}} < 1, \quad (5.41)$$

em que g é a aceleração da gravidade e h é a profundidade da água.

Segundo Porto (2006), em escoamentos com superfícies livres utiliza-se com frequência o valor adimensional chamado número de Froude,

$$Fr = \frac{|\vec{u}|}{\sqrt{gh}}, \quad (5.42)$$

que é utilizado para classificar os escoamentos em escoamento subcrítico ou fluvial se $Fr < 1$; escoamento supercrítico ou torrencial se $Fr > 1$; e, escoamento transcrito se $Fr = 1$.

Desse modo, tendo em vista a restrição em (5.41), o LBM simula escoamentos subcríticos de águas rasas, podendo ser aplicado em diversas situações reais, inclusive no escoamento de bacias hidrográficas. Atualmente, esta limitação está em estudo, como pode ser encontrado em Chopard, Pham e Lefèvre (2013), onde o escoamento é supercrítico unidimensional; e em Rocca et al. (2015), onde o escoamento é transcrito bidimensional.

As restrições dadas nas expressões (5.37), (5.39) e (5.40) podem ser satisfeitas pela adequação dos valores do tamanho do reticulado, do passo de tempo e do parâmetro de relaxamento. Em geral, o LBM é estável se forem satisfeitas as restrições expressas por (5.36), (5.37), (5.39), (5.40) e (5.41) (ZHOU, 2004). Além disso, as condições de contorno são fundamentais para a estabilidade e a precisão de qualquer solução numérica (BAO; MESKAS, 2011).

No LBM, pode-se utilizar uma viscosidade artificial mais elevada do que a viscosidade do fluido escoado. A justificativa para esta abordagem é que o LBM é um modelo intrinsecamente viscoso e a viscosidade numérica pode ser adequadamente ajustada em concordância com os parâmetros da discretização, possibilitando evitar instabilidades numéricas (ROCCA; ADDUCE; SCIORTINO, 2012).

5.1.4 Vantagens do LBM

Conforme Zhou (2004), as principais vantagens do LBM são descritas como:

- Cálculos aritméticos simples, o que facilita a programação;
- Há somente uma única variável desconhecida, a função distribuição microscópica. Está é uma grande vantagem quando comparada a solução direta de equações de fluxo com tratamentos especiais para o cálculo do termo de convecção e de pressão;
- O valor atual da função de distribuição depende apenas das condições anteriores, que é ideal para a escrita de código paralelo;
- O LBM simula problemas com geometria complexa, como o fluxo através de meios porosos, por ser de fácil implementação de condições de contorno;
- Simplicidade na simulação de fluxos complexos, como por exemplo, fluxos multifásicos e fluxos com variações de fronteiras.

Conforme Zhou (2004), somente cálculos aritméticos simples podem gerar soluções com acurácia para as complexas equações diferenciais parciais que governam escoamentos. Esta característica é encontrada no LBM. Além disso, o LBM é um método que fornece um fácil caminho para a simulação de fluxos complexos, o que ainda é um desafio para os métodos numéricos tradicionais.

5.2 LBM COM OPERADOR DE COLISÃO MRT

O BGK não é a única forma para o operador de colisão. No LBM encontram-se três esquemas de abordagem: um único tempo de relaxamento (*single relaxation time* - SRT), conhecido como BGK; dois tempos de relaxamento (*two relaxation times* - TRT); e múltiplos tempos de relaxamento (*multiple relaxation times* - MRT) (TUBBS, 2010; PENG; ZHANG; ZHOU, 2016).

O operador de colisão MRT é mais estável do que o operador BGK (PENG; ZHANG; ZHOU, 2016). O MRT foi proposto por d’Humières (1992) de forma que seja possível melhor capturar as informações físicas de um escoamento e alcançar estabilidade numérica de maneira mais eficiente do que o LBM-BGK. Porém, foram Lallemand e Luo (2000) que fizeram uma análise sobre a estabilidade do LBM-MRT, mostrando como melhorar o modelo de forma sistemática e coerente.

A LBE com operador de colisão MRT (LBE-MRT) é dada por (PENG et al., 2014),

$$f_\alpha(\vec{x} + \vec{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\vec{x}, t) = -(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S})_{\alpha k} (m_k(\vec{x}, t) - m_k^{eq}(\vec{x}, t)) + \frac{\Delta t}{Ne^2} e_{\alpha i} F_i(\vec{x}, t), \quad (5.43)$$

em que,

\mathbf{M} é a matriz transformação de um vetor do espaço $\mathbf{V} = \mathbb{R}^l$, gerado pelas velocidades discretas, em um vetor do espaço dos momentos $\mathbf{M} = \mathbb{R}^l$. A dimensão da matriz é dada pelo número de direções do reticulado;

\mathbf{M}^{-1} é a matriz inversa de \mathbf{M} , que transforma as quantidades que estão no espaço dos momentos para o espaço das velocidades;

m_k são as funções de distribuição no espaço dos momentos para cada uma das direções do reticulado escolhido, onde $m = \mathbf{M}f$;

m_k^{eq} são as funções de distribuição de equilíbrio no espaço dos momentos, onde $m^{eq} = \mathbf{M}f^{eq}$;

\mathbf{S} é uma matriz diagonal de parâmetros de relaxamento $\mathbf{S} = \text{diag}(s_0, s_1, \dots, s_{l-1})$, onde os seus valores são definidos de acordo com problema estudado. Por exemplo, nos escoamentos governados pelas equações de águas rasas, tem-se $s_0 = s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6$ e $s_7 = s_8 = 1/\tau$ considerando o reticulado D2Q9.

Como as funções de distribuição que estão no espaço dos momentos podem ser obtidas por $m = \mathbf{M}f$, tem-se também que $f = \mathbf{M}^{-1}m$ (LALLEMAND; LUO, 2000).

Considerando o reticulado D2Q9, os momentos são determinados em (5.44) para cada uma das 9 velocidades (LALLEMAND; LUO, 2000). Estes momentos formam a

matriz \mathbf{M} , que é a matriz transformação do espaço das velocidades para o espaço dos momentos,

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T, \\
\hat{e} &= (-4, -1, 2, -1, 2, -1, 2, -1, 2)^T, \\
\hat{\epsilon} &= (4, -2, 1, -2, 1, -2, 1, -2, 1)^T, \\
\hat{j}_x &= (0, 1, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 1)^T, \\
\hat{q}_x &= (0, -2, 1, 0, -1, 2, -1, 0, 1)^T, \\
\hat{j}_y &= (0, 0, 1, 1, 1, 0, -1, -1, -1)^T, \\
\hat{q}_y &= (0, 0, 1, -2, 1, 0, -1, 2, -1)^T, \\
\hat{p}_{xx} &= (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0)^T, \\
\hat{p}_{xy} &= (0, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1)^T,
\end{aligned} \tag{5.44}$$

em que, $\hat{\rho}$ é o modo de densidade, \hat{e} é o modo de energia, $\hat{\epsilon}$ está relacionado com o quadrado da energia, \hat{j}_x e \hat{j}_y correspondem às componentes x e y do fluxo de massa, \hat{q}_x e \hat{q}_y correspondem às componentes x e y do fluxo de energia, \hat{p}_{xx} e \hat{p}_{xy} correspondem às componentes na diagonal, e fora da diagonal do tensor de tensões.

As componentes dos vetores em (5.44) são obtidas da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= |e_\alpha|^0 = 1, \\
\hat{e} &= -4|e_\alpha|^0 + \frac{3}{e^2} (e_{\alpha x}^2 + e_{\alpha y}^2), \\
\hat{\epsilon} &= 4|e_\alpha|^0 - \frac{21}{2e^2} (e_{\alpha x}^2 + e_{\alpha y}^2) + \frac{9}{2e^4} (e_{\alpha x}^2 + e_{\alpha y}^2)^2, \\
\hat{j}_x &= \frac{e_{\alpha x}}{e}, \\
\hat{q}_x &= \left[-5|e_\alpha|^0 + \frac{3}{e^2} (e_{\alpha x}^2 + e_{\alpha y}^2) \right] \frac{e_{\alpha x}}{e}, \\
\hat{j}_y &= \frac{e_{\alpha y}}{e}, \\
\hat{q}_y &= \left[-5|e_\alpha|^0 + \frac{3}{e^2} (e_{\alpha x}^2 + e_{\alpha y}^2) \right] \frac{e_{\alpha y}}{e}, \\
\hat{p}_{xx} &= \frac{1}{e^2} (e_{\alpha x}^2 - e_{\alpha y}^2), \\
\hat{p}_{xy} &= \frac{e_{\alpha x} e_{\alpha y}}{e^2},
\end{aligned} \tag{5.45}$$

onde $e_{\alpha x}$ e $e_{\alpha y}$ são, respectivamente, as componente x e y do vetor velocidade no reticulado na direção α ,

Considerando-se (5.44), a matriz de transformação \mathbf{M} é dada por,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{e} \\ \hat{\varepsilon} \\ \hat{j}_x \\ \hat{q}_x \\ \hat{j}_y \\ \hat{q}_y \\ \hat{p}_{xx} \\ \hat{p}_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

Deste modo, como $m^{eq} = \mathbf{M}f^{eq}$, pode-se caracterizar as funções distribuição de equilíbrio do espaço dos momentos da seguinte forma,

$$m_{(0...8)}^{eq} = \begin{pmatrix} h \\ (-4he^2 + 3gh^2 + 3h(u_x^2 + u_y^2))/e^2 \\ (8he^2 - 9gh^2 + 6h(u_x^2 + u_y^2))/2e^2 \\ hu_x/e \\ -hu_x/e \\ hu_y/e \\ -hu_y/e \\ h(u_x^2 - u_y^2)/e^2 \\ hu_xu_y/e^2 \end{pmatrix}, \quad (5.47)$$

que é aplicada na equação do reticulado de Boltzmann com operador MRT (5.43) para determinar a solução das equações de águas rasas.

5.3 ABORDAGEM DA TURBULÊNCIA NO LBM

Na natureza, a maioria dos escoamentos são turbulentos. Portanto, compreender os efeitos da turbulência e incorporá-los ao método numérico, permite simular o problema abordado com mais realidade (SILVEIRA NETO; MANSUR; SILVESTRINI, 2002).

No LBM, a abordagem da turbulência é feita substituindo o parâmetro de relaxamento τ pelo parâmetro de relaxamento total $\tau_t = \tau + \tau_e$, onde τ_e é o parâmetro de relaxamento turbulento. Observe-se que, tanto na LBE-BGK (5.8) como na LBE-MRT (5.43), o parâmetro de relaxamento está presente no termo de colisão. Portanto, a incorporação da turbulência pode ser feita no LBM-BGK como também no LBM-MRT.

Utilizou-se a simulação de grandes escalas (LES), por meio do modelo de Smagorinsky. É uma técnica que oferece resultados refinados e utiliza menos recursos computa-

cionais (ZHOU, 2004). O parâmetro de relaxamento turbulento é fornecido pela seguinte expressão,

$$\tau_t = \tau + \tau_e = \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\tau^2 + \frac{18C_s^2}{e^2 h} \sqrt{\Pi_{ij} \Pi_{ij}}}, \quad (5.48)$$

onde C_s é a constante de Smagorinsky escolhida de forma coerente com o problema e Π_{ij} faz parte do tensor taxa de deformação nas simulações em grandes escalas, dado por,

$$\Pi_{ij} = \sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} (f_{\alpha} - f_{\alpha}^{eq}). \quad (5.49)$$

A incorporação da turbulência apresentou resultados satisfatórios em diversos estudos, tanto com o operador de colisão BGK como também com o MRT (ZHOU, 2004; LIU, 2009; LIU; LI; SHU, 2012; PENG, 2012).

6 MÉTODO DO RETICULADO DE BOLTZMANN PARA O MODELO ONDA CINEMÁTICA

Neste capítulo, utiliza-se a expansão de Chapman-Enskog para determinar as equações necessárias para obter a função distribuição de equilíbrio que recupera as equações de onda cinemática unidimensionais. Os reticulados considerados possuem três e cinco velocidades de movimento. Também, apresentam-se as condições de estabilidade e o algoritmo proposto.

6.1 EQUAÇÃO DO RETICULADO DE BOLTZMANN PARA O MODELO ONDA CINEMÁTICA

A equação do reticulado de Boltzmann para o modelo onda cinemática unidimensional é semelhante a equação estabelecida para as equações de águas rasas. Da mesma forma que antes, as etapas de colisão e propagação são mantidas. Também há um termo de força, porém, este termo é modificado para que o LBM possa representar o escoamento governado pelas equações de onda cinemática. A LBE para o modelo onda cinemática com operador BGK é descrita por (ZHANG; FENG; YANG, 2015; GUO; ZHENG; SHI, 2002),

$$f_\alpha(\vec{x} + \vec{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\tau} [f_\alpha(\vec{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\vec{x}, t)] + (\Delta t)^2 g_\alpha(\vec{x}, t), \quad (6.1)$$

onde f_α é a função distribuição de partículas e representa a probabilidade de uma partícula seguir determinada direção, f_α^{eq} é a função distribuição de equilíbrio, \vec{x} é a posição do nó na malha, t é o instante de tempo, Δx é o espaçamento da malha, Δt é o incremento no tempo, \vec{e}_α são as possíveis direções de movimento na malha, $(\Delta t)^2 g_\alpha$ é o termo de força, Ω_α é o termo de colisão e τ é o parâmetro de relaxamento.

A partir da LBE (6.1), aplica-se a expansão de Chapman-Enskog para determinar as equações discretas do reticulado de Boltzmann. Da combinação dessas equações são determinados os momentos da função distribuição de equilíbrio, que sobre as direções de velocidade do reticulado, fornecem informações necessárias para estabelecer a função distribuição de equilíbrio.

A construção da função distribuição de equilíbrio foi realizada levando-se em consideração os reticulados D1Q3 e D1Q5. Para cada um dos reticulados, foram construídas duas funções distribuição de equilíbrio, uma adequada para o escoamento em planos que representam a superfície da bacia, e a outra para o segmento de canal que representa o canal principal. Cada função distribuição de equilíbrio foi construída de modo a recuperar as equações do modelo onda cinemática adaptadas para o escoamento no canal e nos planos.

6.2 MODELO ONDA CINEMÁTICA BASEADO NO RETICULADO D1Q3

Nesta seção, determinam-se os elementos necessários para a obtenção da função distribuição de equilíbrio de partículas e a recuperação do modelo onda cinemática unidimensional utilizando o reticulado D1Q3. O termo de força é descrito para que possa representar a precipitação ou a contribuição lateral.

O modelo de reticulado D1Q3 tem estrutura unidimensional com uma velocidade nula e duas velocidades de sentidos opostos, possui duas direções para o movimento das partículas de fluido, as quais se movem para os nós vizinhos esquerdo ou direito. A Figura 16 mostra o reticulado D1Q3 com velocidades $\vec{e}_0 = 0$, $\vec{e}_1 = -e$ e $\vec{e}_2 = e$, sendo $e = \Delta x / \Delta t$ a velocidade no reticulado.

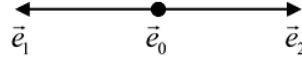


Figura 16 – Modelo de reticulado D1Q3

Fonte: Zhang e Yan (2008).

6.2.1 Expansão Multi-escala

Uma expansão multi-escala deve ser aplicada para fazer a ligação entre a escala mesoscópica, onde se insere o LBM, e a escala macroscópica das equações governantes. A expansão mais utilizada é a expansão de Chapman-Enskog (CHAPMAN; COWLING, 1970), a qual considera escalas de tempo e espaço para que a partir da LBE seja derivada e equação governante do escoamento.

Para que não ocorram funções de distribuição negativas associadas a equação de onda cinemática, o que contraria as leis da física, deve-se atribuir a expansão multi-escala apenas na coordenada de tempo (ZHANG; FENG; YANG, 2015). Dessa forma, aplicando-se três escalas na coordenada temporal, as formas diferenciais para as coordenadas de espaço e tempo são como seguem,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + O(\varepsilon^3), \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} + O(\varepsilon), \end{aligned} \tag{6.2}$$

onde t_0 , t_1 e t_2 são escalas de tempo e ε é um pequeno número de Knudsen. O número de Knudsen é uma medida adimensional definido como a razão entre o comprimento do caminho livre médio molecular e uma escala de comprimento fisicamente representativa.

Expandindo f_α em torno da função de distribuição de equilíbrio f_α^{eq} com ε pequeno, tem-se,

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} + \varepsilon f_\alpha^{(1)} + \varepsilon^2 f_\alpha^{(2)} + O(\varepsilon^3), \quad (6.3)$$

em que $f_\alpha^{(0)} = f_\alpha^{eq}$ e $f_\alpha^{neq} = \varepsilon f_\alpha^{(1)} + \varepsilon^2 f_\alpha^{(2)} + O(\varepsilon^3)$ é a função distribuição de não equilíbrio.

A expansão de $f_\alpha(\vec{x} + \vec{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t)$ em série de Taylor de segunda ordem, resulta,

$$\begin{aligned} f_\alpha(\vec{x} + \vec{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = & f_\alpha + \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \right) f_\alpha + \\ & \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 f_\alpha + O(\Delta t^3). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Vários pesquisadores têm assumido que o número de Knudsen seja igual ao passo de tempo Δt (ZHOU, 2004; ZHANG; YAN, 2008; LIU, 2009; ZHANG; FENG; YANG, 2015). Substituindo na expansão anterior Δt por ε e comparando com a equação (6.1), tem-se,

$$\varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \right) f_\alpha + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 f_\alpha = -\frac{1}{\tau} (f_\alpha - f_\alpha^{eq}) + \varepsilon^2 g_\alpha. \quad (6.5)$$

Baseado nas escalas de tempo e na expansão de f_α , equações (6.2) e (6.3), respectivamente, e comparando todas as ordens de ε , determinam-se as equações discretas do reticulado de Boltzmann de diferentes ordens de magnitude,

$$O(\varepsilon^0) : f_\alpha^{(0)} = f_\alpha^{eq}, \quad (6.6)$$

$$O(\varepsilon^1) : \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \vec{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \right) f_\alpha^{(0)} = -\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(1)}, \quad (6.7)$$

$$O(\varepsilon^2) : \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t_1} + \left(\frac{1}{2} - \tau \right) \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \vec{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 f_\alpha^{(0)} = -\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(2)} + g_\alpha. \quad (6.8)$$

As equações (6.6), (6.7) e (6.8) serão utilizadas para obter os momentos da função distribuição de equilíbrio.

6.2.2 Função Distribuição de Equilíbrio para o Modelo Onda Cinemática Baseado no Reticulado D1Q3

A função distribuição de equilíbrio juntamente com a equação do reticulado de Boltzmann (6.1) desempenham um papel essencial que é recuperar a equação macroscópica

do fluido. A seguir, recupera-se a equação da onda cinemática unidimensional para canal (3.22) e determina-se a sua função distribuição de equilíbrio. Serão apresentados os cálculos para a obtenção da função distribuição de equilíbrio para canal. O desenvolvimento para obter a função distribuição de equilíbrio para o plano, é análogo.

Assumindo que a função distribuição f_α está próxima do equilíbrio no âmbito local, tem-se que,

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha} = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{eq}, \quad (6.9)$$

dessa forma, aplicando o somatório em ambos os lados da equação (6.3) e considerando (6.9), obtém-se,

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(1)} = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(2)} = 0. \quad (6.10)$$

Substituindo a equação (6.7) na equação (6.8), resulta,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t_1} + \left(\frac{1}{2} - \tau\right) \times \\ & \left[-\frac{1}{\tau} \frac{\partial f_{\alpha}^{(1)}}{\partial t_0} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\vec{e}_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right) f_{\alpha}^{(0)} \right) \right] = -\frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(2)} + g_{\alpha}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Tomando a soma sobre as direções do reticulado nas equações (6.7) e (6.11), tem-se, respectivamente,

$$\frac{\partial \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t_0} + \frac{\partial \sum_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)}}{\partial x} = 0, \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t_1} + \left(\frac{1}{2} - \tau\right) \times \\ & \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right) f_{\alpha}^{(0)} \right) \right] = \sum_{\alpha} g_{\alpha}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

A equação da onda cinemática é um caso especial da equação de Burgers. A equação de Burgers é uma equação de convecção-difusão não-linear que representa um modelo simplificado das equações de Navier-Stokes. É utilizada para testar a eficiência de vários esquemas numéricos e para descrever o escoamento por meio de uma onda de choque que viaja em um fluido viscoso (ZHANG; YAN, 2010).

A equação de Burgers unidimensional pode ser escrita da seguinte forma (ZHANG; YAN, 2010; ZHANG; FENG; YANG, 2015),

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\beta v^m) = \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F, \quad (6.14)$$

onde $v(\vec{x}, t)$ é uma função que pode representar uma quantidade real como a altura, a vazão ou a área da seção transversal, γ é o coeficiente de difusão, β e m são parâmetros a serem determinados, e F representa o efeito externo ou força externa.

Comparando a equação (6.12) com a equação (6.14), encontram-se,

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} = v, \quad (6.15)$$

$$\sum_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} = \beta v^m. \quad (6.16)$$

A substituição das equações (6.15) e (6.16), respectivamente em (6.12) e em (6.13) resulta,

$$\frac{\partial v}{\partial t_0} + \frac{\partial}{\partial x} (\beta v^m) = 0, \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t_1} + \left(\frac{1}{2} - \tau \right) \times \\ & \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial (\beta v^m)}{\partial t_0} + \frac{\partial \sum_{\alpha} \vec{e}_{\alpha}^2 f_{\alpha}^{(0)}}{\partial x} \right) \right] = \sum_{\alpha} g_{\alpha}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Pela substituição da equação (6.17) na equação (6.18) e comparação da equação (6.18) modificada com a equação (6.14), tem-se,

$$\sum_{\alpha} \vec{e}_{\alpha}^2 f_{\alpha}^{(0)} = \beta^2 m^2 \frac{v^{2m-1}}{2m-1} - \frac{\gamma v}{1/2 - \tau}. \quad (6.19)$$

A equação de Burgers com termo de força (6.14) é recuperada restaurando as escalas de tempo t_0 , t_1 e t_2 para a escala de tempo t . Para isso, faz-se (6.7) + ε (6.8),

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \sum_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)}}{\partial x} + \\ & \varepsilon \left(\frac{1}{2} - \tau \right) \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 f_{\alpha}^{(0)} = \varepsilon \sum_{\alpha} g_{\alpha} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Substituindo as equações (6.12), (6.16), (6.17) e (6.18) na equação (6.20) e organizando os termos, obtém-se,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (\beta v^m)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 (\gamma v)}{\partial x^2} + \varepsilon \sum_{\alpha} g_{\alpha} + O(\varepsilon^2). \quad (6.21)$$

Comparando a equação (6.21) com (6.14), determina-se o termo de força,

$$F = \varepsilon \sum_{\alpha} g_{\alpha}. \quad (6.22)$$

Tomando o valor médio $g_{\alpha} = F/3\varepsilon$ em cada direção de velocidade do reticulado D1Q3, tem-se o termo de força F ,

$$\varepsilon \sum_{\alpha} g_{\alpha} = \varepsilon (g_0 + g_1 + g_2) = \varepsilon \left(3 \frac{F}{3\varepsilon} \right) = F. \quad (6.23)$$

Assumindo que a força externa é a taxa líquida de influxo por unidade de comprimento do canal, obtém-se,

$$g_{\alpha}(\vec{x}, t) = \frac{q_l(\vec{x}, t)}{3\varepsilon}, \quad \alpha = 0, 1, 2. \quad (6.24)$$

A equação (6.21) ainda difere da equação (6.14) pela multiplicação de ε em $\partial^2(\gamma v)/\partial x^2$. Para eliminar ε altera-se a equação (6.19) para a forma,

$$\sum_{\alpha} \tilde{e}_{\alpha}^2 f_{\alpha}^{(0)} = \beta^2 m^2 \frac{v^{2m-1}}{2m-1} + k\gamma v, \quad (6.25)$$

em que,

$$k = \frac{1}{\varepsilon(\tau - 1/2)}. \quad (6.26)$$

Dessa forma, a equação de Burgers (6.14) com erro de truncamento de segunda ordem é recuperada.

Assumindo $\gamma = 0$ na equação de Burgers, tem-se a equação da onda cinemática, pois no modelo onda cinemática não há difusão. A função distribuição de equilíbrio é determinada pela resolução do sistema de equações formado pelos momentos (6.15), (6.16) e (6.25). Levando-se em conta as direções de velocidade do modelo D1Q3, e substituindo u pela área da seção transversal do canal, A , a função distribuição de equilíbrio associada a equação (3.22) do canal é obtida,

$$\begin{aligned} f_1^{eq} &= \frac{1}{2e^2} \left(\frac{\beta_c^2 m_c^2}{2m_c - 1} A^{2m_c-1} - e \beta_c A^{m_c} \right) \\ f_0^{eq} &= \frac{1}{e^2} \left(\frac{-\beta_c^2 m_c^2}{2m_c - 1} A^{2m_c-1} + e^2 A \right) \\ f_2^{eq} &= \frac{1}{2e^2} \left(\frac{\beta_c^2 m_c^2}{2m_c - 1} A^{2m_c-1} + e \beta_c A^{m_c} \right) \end{aligned} \quad (6.27)$$

O mesmo desenvolvimento pode ser aplicado na determinação da função distribuição de equilíbrio para a equação (3.23) da superfície da bacia e termo de força externa (ZHANG; FENG; YANG, 2015),

$$\begin{aligned} f_1^{eq} &= \frac{1}{2e^2} \left(\frac{\beta_s^2 m_s^2}{2m_s - 1} h^{2m_s-1} - e \beta_s h^{m_s} \right), \\ f_0^{eq} &= \frac{1}{e^2} \left(\frac{-\beta_s^2 m_s^2}{2m_s - 1} h^{2m_s-1} + e^2 h \right), \\ f_2^{eq} &= \frac{1}{2e^2} \left(\frac{\beta_s^2 m_s^2}{2m_s - 1} h^{2m_s-1} + e \beta_s h^{m_s} \right), \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$g_\alpha(\vec{x}, t) = \frac{i_e(\vec{x}, t)}{3\varepsilon}, \quad \alpha = 0, 1, 2. \quad (6.29)$$

6.2.3 Estabilidade

Levando em consideração que o modelo onda cinemática é uma simplificação das equações de águas rasas, nesta tese aplicou-se as condições descritas na seção 5.1.3 para manter a estabilidade da simulação do escoamento governado pelas equações de onda cinemática. As condições foram adaptadas para utilização no escoamento unidimensional. Nota-se que pode ser preciso modificar a expressão da celeridade conforme a equação governante e o meio físico. Com as equações de águas rasas, a celeridade é representada por,

$$c = \sqrt{gh}. \quad (6.30)$$

No escoamento em canal retangular pelo modelo onda cinemática, com a relação de Manning, a celeridade é descrita pela expressão (PORTO, 2006),

$$c = \frac{\sqrt{S_o} b^{2/3}}{n_b} \left(\frac{h^{2/3}(5b + 6h)}{3(b + 2h)^{5/3}} \right), \quad (6.31)$$

de forma geral, a celeridade da onda cinemática é dada por,

$$c = \frac{dQ}{dA} = \frac{1}{b} \frac{dQ}{dh}. \quad (6.32)$$

6.3 MODELO ONDA CINEMÁTICA BASEADO NO RETICULADO D1Q5

Os passos para determinar a função distribuição de equilíbrio de partículas com reticulado D1Q5 são os mesmos utilizados para o reticulado D1Q3, porém são obtidas expressões com mais termos para que sejam consideradas cinco direções de movimento

das partículas. O modelo de reticulado D1Q5 é unidimensional com quatro direções de velocidades não nulas e uma para velocidade nula. As partículas do fluido se movimentam para dois nós vizinhos a esquerda e dois nós vizinhos a direita. A Figura 17 mostra o reticulado D1Q5 com velocidades $\vec{e}_0 = 0$, $\vec{e}_1 = -e$, $\vec{e}_2 = -2e$, $\vec{e}_3 = e$ e $\vec{e}_4 = 2e$.

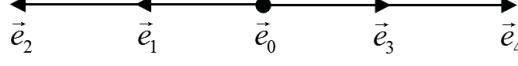


Figura 17 – Modelo de reticulado D1Q5

Fonte: Zhang e Yan (2008).

Tomando a expansão de Chapman-Enskog com cinco escalas de tempo, as formas diferenciais para as coordenadas de tempo e espaço são descritas por,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial t_3} + \varepsilon^4 \frac{\partial}{\partial t_4} + O(\varepsilon^5), \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} + O(\varepsilon),\end{aligned}\tag{6.33}$$

em que t_0, t_1, t_2, t_3 e t_4 são escalas de tempo e ε é o número de Knudsen.

Expandindo f_α em torno da função de distribuição de equilíbrio f_α^{eq} com ε pequeno, tem-se,

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} + \varepsilon f_\alpha^{(1)} + \varepsilon^2 f_\alpha^{(2)} + \varepsilon^3 f_\alpha^{(3)} + \varepsilon^4 f_\alpha^{(4)} + O(\varepsilon^5),\tag{6.34}$$

em que $f_\alpha^{(0)}$ é função distribuição de equilíbrio,

$$f_\alpha^{(0)} = f_\alpha^{eq},\tag{6.35}$$

e, a função distribuição de não equilíbrio é descrita na forma,

$$f_\alpha^{neq} = \varepsilon f_\alpha^{(1)} + \varepsilon^2 f_\alpha^{(2)} + \varepsilon^3 f_\alpha^{(3)} + \varepsilon^4 f_\alpha^{(4)} + O(\varepsilon^5).\tag{6.36}$$

A expansão de $f_\alpha(\vec{x} + \vec{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t)$ em série de Taylor de quinta ordem, considerando $\Delta t = \varepsilon$, comparada com a equação (6.1) de evolução do LBM, resulta em,

$$\varepsilon \Delta f_\alpha + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta^2 f_\alpha + \frac{\varepsilon^3}{6} \Delta^3 f_\alpha + \frac{\varepsilon^4}{24} \Delta^4 f_\alpha = -\frac{1}{\tau} (f_\alpha - f_\alpha^{eq}) + \varepsilon^2 g_\alpha,\tag{6.37}$$

em que,

$$\Delta \equiv \frac{\partial}{\partial t_0} + \vec{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x}.\tag{6.38}$$

Baseado nas escalas de tempo e na expansão de f_α , equações (6.33) e (6.34), respectivamente, e comparando todas as ordens de ε , determinam-se as equações discretas do reticulado de Boltzmann de diferentes ordens de magnitude,

$$O(\varepsilon^0) : f_\alpha^{(0)} = f_\alpha^{eq}, \quad (6.39)$$

$$O(\varepsilon^1) : \Delta f_\alpha^{(0)} = -\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(1)}, \quad (6.40)$$

$$O(\varepsilon^2) : \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t_1} + p_2 \Delta^2 f_\alpha^{(0)} = -\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(2)} + g_\alpha, \quad (6.41)$$

$$O(\varepsilon^3) : \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t_2} + p_3 \Delta^3 f_\alpha^{(0)} + 2p_2 \Delta \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t_1} = -\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(3)} - \tau \Delta g_\alpha, \quad (6.42)$$

$$O(\varepsilon^4) : \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t_3} + p_4 \Delta^4 f_\alpha^{(0)} + 3p_3 \Delta^2 \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t_1} + 2p_2 \Delta \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t_2} + p_2 \frac{\partial^2 f_\alpha^{(0)}}{\partial t_1^2} = -\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(4)} + p_2 \tau \Delta^2 g_\alpha - \tau \frac{\partial g_\alpha}{\partial t_1}, \quad (6.43)$$

em que p_1 , p_2 , p_3 e p_4 são polinômios em relação ao parâmetro de relaxamento τ , descritos por,

$$\begin{aligned} p_1(\tau) &= \tau, \\ p_2(\tau) &= \frac{1}{2} - \tau, \\ p_3(\tau) &= \tau^2 - \tau + \frac{1}{6}, \\ p_4(\tau) &= -\tau^3 + \frac{3}{2}\tau^2 - \frac{7}{12}\tau + \frac{1}{24}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

As equações (6.39), (6.40), (6.41), (6.42) e (6.43) serão utilizadas para obter os momentos da função distribuição de equilíbrio, e a partir das equações geradas da expansão dos momentos sobre o reticulado, determinar as expressões da função distribuição de equilíbrio nas direções do reticulado.

Assumindo que a função distribuição f_α está próxima do equilíbrio localmente, devem ocorrer as seguintes condições de conservação,

$$\begin{aligned} \sum_\alpha f_\alpha &= \sum_\alpha f_\alpha^{(eq)}, \\ \sum_\alpha \vec{e}_\alpha f_\alpha &= \sum_\alpha \vec{e}_\alpha f_\alpha^{(eq)}, \\ \sum_\alpha \vec{e}_\alpha^2 f_\alpha &= \sum_\alpha \vec{e}_\alpha^2 f_\alpha^{(eq)}, \\ \sum_\alpha \vec{e}_\alpha^3 f_\alpha &= \sum_\alpha \vec{e}_\alpha^3 f_\alpha^{(eq)}, \\ \sum_\alpha \vec{e}_\alpha^4 f_\alpha &= \sum_\alpha \vec{e}_\alpha^4 f_\alpha^{(eq)}, \end{aligned} \quad (6.45)$$

em consequência, as somas sobre a função distribuição de não equilíbrio têm as seguintes restrições,

$$\sum_{\alpha} \vec{e}_{\alpha}^n f_{\alpha}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (6.46)$$

Nesta seção, desenvolve-se com maior detalhamento os momentos de terceira e quarta ordem para estabelecer a função distribuição de equilíbrio que recupera a equação de onda cinemática com reticulado D1Q5.

Para simplificação dos cálculos, assume-se que a força externa não varia no espaço e no tempo, portanto são nulas as derivadas nos termos que envolvem g_{α} do lado direito das equações (6.42) e (6.43).

As três próximas equações serão listadas para serem utilizadas no desenvolvimento que segue.

Aplica-se, na equação (6.40), da derivada em relação as escalas de tempo t_i ,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t_i} = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial f_{\alpha}^{(1)}}{\partial t_i}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (6.47)$$

a substituição da equação (6.40) em (6.41) fornece,

$$\frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t_1} = \frac{p_2}{\tau} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right) f_{\alpha}^{(1)} - \frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(2)}, \quad (6.48)$$

da equação (6.17) pode-se escrever,

$$\frac{\partial v}{\partial t_0} = -\frac{\partial \beta v^m}{\partial x}. \quad (6.49)$$

Para determinar o momento de terceira ordem, retoma-se a equação (6.42),

$$\frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t_2} + p_3 \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right)^3 f_{\alpha}^{(0)} + 2p_2 \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t_1} = -\frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(3)}, \quad (6.50)$$

substituindo (6.40) e (6.47), respectivamente, na segunda e terceira parcelas de (6.50) resulta,

$$\frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t_2} + p_3 \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(-\frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(1)} \right) + 2p_2 \left(-\frac{1}{\tau} \frac{\partial f_{\alpha}^{(1)}}{\partial t_1} \right) = -\frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(3)}, \quad (6.51)$$

expandindo o termo ao quadrado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t_2} + p_3 \left(\frac{\partial^2}{\partial t_0^2} + 2\vec{e}_\alpha \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial x} \right) \left(-\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(1)} \right) + \\ p_3 \vec{e}_\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(1)} \right) + 2p_2 \left(-\frac{1}{\tau} \frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial t_1} \right) = -\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(3)}, \end{aligned} \quad (6.52)$$

substituindo (6.40) na terceira parcela da equação anterior,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t_2} + p_3 \left(\frac{\partial^2}{\partial t_0^2} + 2\vec{e}_\alpha \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial x} \right) \left(-\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(1)} \right) + \\ p_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\vec{e}_\alpha^2 \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t_0} + \vec{e}_\alpha^3 \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial x} \right) + 2p_2 \left(-\frac{1}{\tau} \frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial t_1} \right) = -\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(3)}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Aplicando o somatório nas cinco direções do reticulado D1Q5 em (6.53),

$$\frac{\partial \sum_\alpha f_\alpha^{(0)}}{\partial t_2} + p_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \sum_\alpha \vec{e}_\alpha^2 f_\alpha^{(0)}}{\partial t_0} + \frac{\partial \sum_\alpha \vec{e}_\alpha^3 f_\alpha^{(0)}}{\partial x} \right) = 0, \quad (6.54)$$

substituindo os momentos de ordem zero (6.15) e primeira ordem (6.16) na equação (6.54),

$$\frac{\partial v}{\partial t_2} + p_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial}{\partial t_0} \left(\frac{\beta^2 m^2}{2m-1} v^{2m-1} \right) + \frac{\partial \sum_\alpha \vec{e}_\alpha^3 f_\alpha^{(0)}}{\partial x} \right] = 0, \quad (6.55)$$

sabendo que,

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \left(\frac{\beta^2 m^2}{2m-1} v^{2m-1} \right) = \frac{\beta^2 m^2}{2m-1} (2m-1) v^{2m-2} \frac{\partial u}{\partial t_0}, \quad (6.56)$$

substituindo (6.49) e organizando os termos, tem-se,

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \left(\frac{\beta^2 m^2}{2m-1} v^{2m-1} \right) = -\frac{\beta^3 m^3}{3m-2} \frac{\partial}{\partial x} (v^{3m-2}), \quad (6.57)$$

aplicando (6.57) em (6.55),

$$\frac{\partial v}{\partial t_2} + p_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-\frac{\beta^3 m^3}{3m-2} \frac{\partial}{\partial x} (v^{3m-2}) + \frac{\partial \sum_\alpha \vec{e}_\alpha^3 f_\alpha^{(0)}}{\partial x} \right] = 0, \quad (6.58)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial v}{\partial t_2} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[p_3 \left(-\frac{\beta^3 m^3}{3m-2} v^{3m-2} + \sum_\alpha \vec{e}_\alpha^3 f_\alpha^{(0)} \right) \right] = 0. \quad (6.59)$$

Comparando (6.59) com a equação de Burgers (6.14), assume-se que,

$$p_3 \left(-\frac{\beta^3 m^3}{3m-2} v^{3m-2} + \sum_{\alpha} \vec{e}_{\alpha}^3 f_{\alpha}^{(0)} \right) = 0, \quad (6.60)$$

isolando o somatório na equação anterior, determina-se o momento de terceira ordem da função distribuição de equilíbrio,

$$\sum_{\alpha} \vec{e}_{\alpha}^3 f_{\alpha}^{(0)} = \frac{\beta^3 m^3}{3m-2} v^{3m-2}. \quad (6.61)$$

Para determinar o momento de quarta ordem, retoma-se a equação (6.43),

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t_3} + p_4 \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right)^4 f_{\alpha}^{(0)} + 3p_3 \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t_1} + \\ 2p_2 \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t_2} + p_2 \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t_1} \right) = -\frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(4)}, \end{aligned} \quad (6.62)$$

substituindo (6.40) na segunda parcela, (6.47) na terceira e quarta parcelas, e (6.48) na quinta parcela, da equação (6.62) resulta,

$$\frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t_3} + p_4 \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right)^3 \left(-\frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(1)} \right) + N_1 = 0, \quad (6.63)$$

em que,

$$\begin{aligned} N_1 = 3p_3 \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(-\frac{1}{\tau} \frac{\partial f_{\alpha}^{(1)}}{\partial t_1} \right) + 2p_2 \left(-\frac{1}{\tau} \frac{\partial f_{\alpha}^{(1)}}{\partial t_2} \right) + \\ p_2 \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{p_2}{\tau} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right) f_{\alpha}^{(1)} - \frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(2)} \right) + \frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(4)}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Expandindo o segundo termo de (6.63),

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t_3} + p_4 \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial}{\partial t_0} \left(-\frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(1)} \right) + \\ p_4 \left(\frac{\partial^2}{\partial t_0^2} + 2\vec{e}_{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial x} \right) \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(1)} \right) + p_4 \vec{e}_{\alpha}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(1)} \right) + N_1 = 0, \end{aligned} \quad (6.65)$$

atribuindo,

$$\begin{aligned} N_2 = p_4 \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial}{\partial t_0} \left(-\frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(1)} \right) + \\ p_4 \left(\frac{\partial^2}{\partial t_0^2} + 2\vec{e}_{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial x} \right) \vec{e}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\tau} f_{\alpha}^{(1)} \right) + N_1, \end{aligned} \quad (6.66)$$

a equação (6.65) torna-se,

$$\frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t_3} + p_4 \bar{e}_\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(1)} \right) + N_2 = 0, \quad (6.67)$$

que pode ser escrita como,

$$\frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t_3} + p_4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\bar{e}_\alpha^3 \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t_0} + \bar{e}_\alpha^4 \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial x} \right] + N_2 = 0. \quad (6.68)$$

Aplicando a soma na equação (6.68) sobre as cinco direções do reticulado,

$$\frac{\partial \sum_\alpha f_\alpha^{(0)}}{\partial t_3} + p_4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\frac{\partial \sum_\alpha \bar{e}_\alpha^3 f_\alpha^{(0)}}{\partial t_0} + \frac{\partial \sum_\alpha \bar{e}_\alpha^4 f_\alpha^{(0)}}{\partial x} \right] + 0 = 0, \quad (6.69)$$

a expressão em N_2 torna-se nula devido as restrições descritas na equação (6.46).

Substituindo os momentos de ordem zero (6.15) e terceira ordem (6.61) na equação (6.69),

$$\frac{\partial v}{\partial t_3} + p_4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\frac{\partial}{\partial t_0} \left(\frac{\beta^3 m^3}{3m-2} v^{3m-2} \right) + \frac{\partial \sum_\alpha \bar{e}_\alpha^4 f_\alpha^{(0)}}{\partial x} \right] = 0, \quad (6.70)$$

sabendo que,

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \left(\frac{\beta^3 m^3}{3m-2} v^{3m-2} \right) = \frac{\beta^3 m^3}{3m-2} (3m-2) v^{3m-3} \frac{\partial v}{\partial t_0}, \quad (6.71)$$

substituindo (6.49) e organizando os termos, tem-se,

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \left(\frac{\beta^3 m^3}{3m-2} v^{3m-2} \right) = -\frac{\beta^4 m^4}{4m-3} \frac{\partial}{\partial x} (v^{4m-3}), \quad (6.72)$$

aplicando (6.72) em (6.70) tem-se,

$$\frac{\partial v}{\partial t_3} + p_4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[-\frac{\beta^4 m^4}{4m-3} \frac{\partial}{\partial x} (v^{4m-3}) + \frac{\partial \sum_\alpha \bar{e}_\alpha^4 f_\alpha^{(0)}}{\partial x} \right] = 0, \quad (6.73)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial v}{\partial t_3} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[p_4 \left(-\frac{\beta^4 m^4}{4m-3} v^{4m-3} + \sum_\alpha \bar{e}_\alpha^4 f_\alpha^{(0)} \right) \right] = 0. \quad (6.74)$$

Comparando (6.74) com a equação de Burgers (6.14), assume-se que,

$$p_4 \left(-\frac{\beta^4 m^4}{4m-3} v^{4m-3} + \sum_\alpha \bar{e}_\alpha^4 f_\alpha^{(0)} \right) = 0, \quad (6.75)$$

isolando o somatório na equação anterior, determina-se o momento de quarta ordem da função distribuição de equilíbrio,

$$\sum_{\alpha} \tilde{e}_{\alpha}^4 f_{\alpha}^{(0)} = \frac{\beta^4 m^4}{4m-3} v^{4m-3}. \quad (6.76)$$

Dessa forma, os momentos de zero a quarta ordem, respectivamente, são descritos como,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} &= v, \\ \sum_{\alpha} \tilde{e}_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} &= \beta v^m, \\ \sum_{\alpha} \tilde{e}_{\alpha}^2 f_{\alpha}^{(0)} &= \frac{\beta^2 m^2}{2m-1} v^{2m-1}, \\ \sum_{\alpha} \tilde{e}_{\alpha}^3 f_{\alpha}^{(0)} &= \frac{\beta^3 m^3}{3m-2} v^{3m-2}, \\ \sum_{\alpha} \tilde{e}_{\alpha}^4 f_{\alpha}^{(0)} &= \frac{\beta^4 m^4}{4m-3} v^{4m-3}. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Desenvolvendo as equações em (6.77) nas direções das velocidades do reticulado D1Q5, obtêm-se,

$$\begin{aligned} f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 &= v, \\ -ef_1 - 2ef_2 + ef_3 + 2ef_4 &= \beta v^m, \\ e^2 f_1 + 4e^2 f_2 + e^2 f_3 + 4e^2 f_4 &= \frac{\beta^2 m^2}{2m-1} v^{2m-1}, \\ -e^3 f_1 - 8e^3 f_2 + e^3 f_3 + 8e^3 f_4 &= \frac{\beta^3 m^3}{3m-2} v^{3m-2}, \\ e^4 f_1 + 16e^4 f_2 + e^4 f_3 + 16e^4 f_4 &= \frac{\beta^4 m^4}{4m-3} v^{4m-3}. \end{aligned} \quad (6.78)$$

A resolução do sistema formado pelas equações em (6.78) determina a função distribuição de equilíbrio,

$$\begin{aligned} f_1^{eq} &= \frac{1}{6} (-4C_1 + 4C_2 + C_3 - C_4), \\ f_2^{eq} &= \frac{1}{24} (2C_1 - C_2 - 2C_3 + C_4), \\ f_3^{eq} &= \frac{1}{6} (4C_1 + 4C_2 - C_3 - C_4), \\ f_4^{eq} &= \frac{1}{24} (-2C_1 - C_2 + 2C_3 + C_4), \\ f_0^{eq} &= u - (f_1^{eq} + f_2^{eq} + f_3^{eq} + f_4^{eq}), \end{aligned} \quad (6.79)$$

onde,

$$C_j = \left(\frac{\beta m}{e} \right)^j \frac{v^{jm-(j-1)}}{jm - (j-1)}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (6.80)$$

Como o reticulado D1Q5 tem mais direções de velocidade comparado com o D1Q3, é preciso adequar o termo de força. Tomando o valor médio de g_α , como descrito na seção 6.2.2, o termo de força é determinado pela expressão,

$$g_\alpha = \frac{F}{5\varepsilon}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (6.81)$$

em que F pode representar a precipitação quando se trata do escoamento na superfície da bacia, ou representar a contribuição lateral quando se trata do escoamento em canais.

6.4 ALGORITMO PROPOSTO

Para melhor clareza em termos da programação, descreve-se, como segue, um algoritmo com os passos necessários para a aplicação do LBM em um plano de escoamento.

1. Inicialização ($t = 0$)

- a) Leitura dos dados físicos e da precipitação;
- b) Condição inicial: $h(x, 0) = 0$, assim $q(x, 0) = 0$;
- c) Calcular o valor inicial de $f_\alpha^{eq}(h(x, t))$;
- d) Definir $f_\alpha(x, t) = f_\alpha^{eq}(h(x, t))$.

2. Iterações ($t_{inicial}$ até t_{final})

- a) Etapa de colisão

$$f_\alpha^C(x, t) = f_\alpha(x, t) - (1/\tau)[f_\alpha(x, t) - f_\alpha^{eq}(h(x, t))].$$
- b) Etapa de propagação
 - i) Calcular propagação: $f_\alpha^P(x + \vec{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = f_\alpha^C(x, t) + (\Delta t)^2 g_\alpha(x, t)$;
 - ii) Atualizar f_α : $f_\alpha(x, t) = f_\alpha^P(x + \vec{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t)$.
- c) Condições de contorno

Atribuídas no início e o final do plano conforme descrito na seção 7.1.
- d) Atualizar $h(x, t)$ e $q(x, t)$

$$h(x, t) = \sum_\alpha f_\alpha(x, t);$$

$$q(x, t) = \beta_s h(x, t)^{m_s}.$$
- e) Atualizar $f_\alpha^{eq}(h(x, t))$ e voltar ao passo 2.

A cada passo de tempo calcula-se a contribuição lateral para entrada no canal. O algoritmo para o canal segue os mesmos passos, porém a variável a ser calculada é a área da seção transversal e não a profundidade. Sobre o canal, a precipitação não é considerada. Para exemplificar, encontram-se no apêndice A as sub-rotinas de colisão e propagação, escritas em linguagem Fortran, utilizadas na simulação tanto nos planos de escoamento quanto nos segmentos de canal da bacia hidrográfica.

7 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Apresenta-se neste capítulo as condições de contorno utilizadas nos problemas abordados nesta tese. São abordados os tratamentos de fronteiras para problemas unidimensionais e bidimensionais.

7.1 ABORDAGEM DAS FRONTEIRAS NO ESCOAMENTO SUPERFICIAL

A representação adequada das características físicas do problema, por meio das condições iniciais e de contorno, é um fator crucial para a estabilidade e precisão das simulações. A Figura 18 ilustra uma malha unidimensional para discretização do domínio de um problema de escoamento, a qual define a entrada e a saída de um canal e as direções de velocidade do reticulado D1Q3.

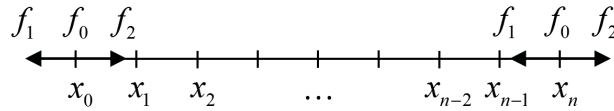


Figura 18 – Malha computacional

As condições de contorno macroscópicas para ambos o escoamento superficial e o escoamento em canal são conhecidas na fronteira esquerda, porém desconhecidas na fronteira direita. O comportamento macroscópico nas fronteiras é alcançado pela correta aplicação das funções de distribuição de partículas. Com esse objetivo, as funções de distribuição de equilíbrio são utilizadas na fronteira esquerda, e para a fronteira direita, as funções de distribuição são determinadas por extrapolação (ZHANG; FENG; YANG, 2015).

As funções de distribuição de equilíbrio são aplicadas na fronteira esquerda para corresponder as condições macroscópicas: profundidade nula em um plano de escoamento, ou área da seção transversal em um segmento de canal. As funções $f_2(x_0)$ e $f_1(x_n)$ são desconhecidas, pois teriam de ser propagadas de nós fora do domínio computacional. As funções de distribuição nos nós da fronteira esquerda são determinadas por,

$$\begin{aligned}\bar{f}_0(x_0) &= f_0^{eq}(x_0) , \\ \bar{f}_1(x_0) &= f_1^{eq}(x_0), \\ \bar{f}_2(x_0) &= v^* - \bar{f}_0(x_0) - \bar{f}_1(x_0),\end{aligned}\tag{7.1}$$

e, para os nós da fronteira direita, tem-se,

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{f}}_0(x_n) &= \bar{f}_0(x_n), \\
\bar{\bar{f}}_2(x_n) &= \bar{f}_2(x_n), \\
\bar{\bar{f}}_1(x_n) &= 2\bar{\bar{f}}_1(x_n - 1) - \bar{\bar{f}}_1(x_n - 2),
\end{aligned} \tag{7.2}$$

em que $\bar{\bar{f}}$ é a função distribuição de velocidade das partículas depois da propagação, \bar{f} é a função distribuição de velocidade das partículas antes da propagação, v^* é a variável macroscópica na fronteira, podendo ser substituída por h ou A . Os nós inicial e final da malha computacional são representados, respectivamente, por x_0 e x_n .

No reticulado D1Q5 são aplicadas condições de contorno nos dois primeiros e nos dois últimos nós da malha (ZHANG et al., 2014). Na fronteira esquerda, tem-se,

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{f}}_0(x_0) &= f_0^{eq}(x_0), \\
\bar{\bar{f}}_1(x_0) &= f_1^{eq}(x_0), \\
\bar{\bar{f}}_2(x_0) &= f_2^{eq}(x_0), \\
\bar{\bar{f}}_3(x_0) &= f_3^{eq}(x_0), \\
\bar{\bar{f}}_4(x_0) &= v^* - (\bar{\bar{f}}_0(x_0) + \bar{\bar{f}}_1(x_0) + \bar{\bar{f}}_2(x_0) + \bar{\bar{f}}_3(x_0)),
\end{aligned} \tag{7.3}$$

e,

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{f}}_0(x_1) &= \bar{f}_0(x_1), \\
\bar{\bar{f}}_1(x_1) &= \bar{f}_1(x_2), \\
\bar{\bar{f}}_2(x_1) &= \bar{f}_2(x_3), \\
\bar{\bar{f}}_3(x_1) &= \bar{f}_3(x_0), \\
\bar{\bar{f}}_4(x_1) &= 2\bar{\bar{f}}_4(x_2) - \bar{\bar{f}}_4(x_3).
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Na fronteira direita, aplica-se,

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{f}}_0(x_{n-1}) &= \bar{f}_0(x_{n-1}), \\
\bar{\bar{f}}_3(x_{n-1}) &= \bar{f}_3(x_{n-2}), \\
\bar{\bar{f}}_4(x_{n-1}) &= \bar{f}_4(x_{n-3}), \\
\bar{\bar{f}}_1(x_{n-1}) &= \bar{f}_1(x_n), \\
\bar{\bar{f}}_2(x_{n-1}) &= 2\bar{\bar{f}}_2(x_{n-2}) - \bar{\bar{f}}_2(x_{n-3}),
\end{aligned} \tag{7.5}$$

e,

$$\begin{aligned}
 \bar{\bar{f}}_0(x_n) &= \bar{f}_0(x_n), \\
 \bar{\bar{f}}_3(x_n) &= \bar{f}_3(x_{n-1}), \\
 \bar{\bar{f}}_4(x_n) &= \bar{f}_4(x_{n-2}), \\
 \bar{\bar{f}}_1(x_n) &= 2\bar{\bar{f}}_1(x_{n-1}) - \bar{\bar{f}}_1(x_{n-2}), \\
 \bar{\bar{f}}_2(x_n) &= 2\bar{\bar{f}}_2(x_{n-1}) - \bar{\bar{f}}_2(x_{n-2}).
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

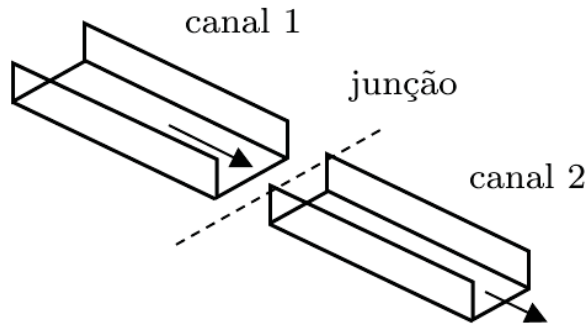


Figura 19 – Junção de canais das sub-bacias

No modelo computacional, as características físicas em cada trecho de canal são mantidas constantes durante a simulação, isto é, não são alterados os valores do comprimento, largura, declividade e coeficiente de Manning do segmento de canal. O que pode implicar em seções transversais diferentes na junção dos canais, levando a necessidade de implementação de condição de contorno. Para que haja a conservação de massa, a vazão de um segmento de canal a montante para um segmento a jusante deve permanecer a mesma. Com base na Figura 19 e na equação (3.28), a vazão no início do canal 2 é determinada por,

$$Q_2 = \frac{S_{o2}^{1/2}}{n_{b2} P_2^{2/3}} A_2^{5/3}, \tag{7.7}$$

escrevendo o perímetro molhado em termos da área molhada e da largura do canal, e substituindo na equação (7.7), tem-se,

$$Q_2 \frac{n_{b2}}{S_{o2}^{1/2}} \left(b_2 + 2 \frac{A_2}{b_2} \right)^{2/3} - A_2^{5/3} = 0. \tag{7.8}$$

O valor de A_2 é calculado pelo método iterativo de Newton-Raphson e considerado no LBM por meio da condição de contorno da equação (7.1) para D1Q3 ou da equação (7.3) para D1Q5, onde substitui-se v^* por A_2 . Utiliza-se a variável área ao invés da vazão,

pois a função distribuição de equilíbrio é dependente da área, e por meio da área obtém-se a vazão em uma seção transversal. Quanto aos planos de escoamento v^* é sempre nula para cumprir a condição de contorno $h(0, t) = 0$ em todos os passos de tempo.

7.2 CONDIÇÃO DE ESCORREGAMENTO

A condição de contorno de escorregamento pode ser aplicada nos casos em que o atrito com a parede ou com obstáculos é desprezível.

A Figura 20 ilustra a malha bidimensional de um canal em que as funções distribuição de partículas f_2 , f_3 e f_4 são desconhecidas na parede inferior do canal. Com relação a parede superior, as funções desconhecidas são f_6 , f_7 e f_8 (LIU, 2009).

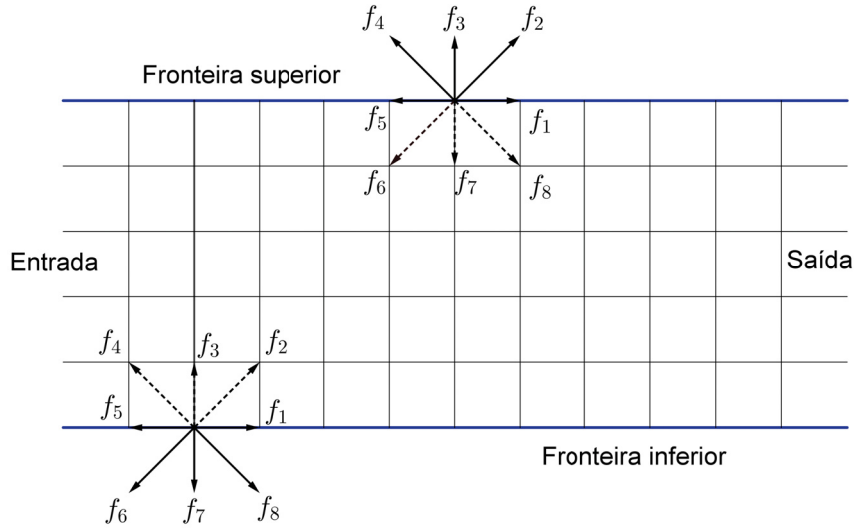


Figura 20 – Funções de distribuição desconhecidas nas paredes de um canal

A condição de escorregamento fornece as seguintes atribuições para cada uma das funções distribuição de partículas desconhecidas na parede inferior,

$$f_2 = f_8, \quad f_3 = f_7, \quad f_4 = f_6. \quad (7.9)$$

Procedimento análogo é feito para as funções desconhecidas na parede superior,

$$f_6 = f_4, \quad f_7 = f_3, \quad f_8 = f_2. \quad (7.10)$$

7.3 CONDIÇÃO DE NÃO-ESCORREGAMENTO

A condição de não-escorregamento considera que, devido ao atrito, a velocidade nas paredes é nula. Este esquema também é chamado de *bounce back*. A condição de contorno *bounce back* pode ser imposta sobre partículas que entram em contato com paredes ou obstáculos sólidos e tem o objetivo de simular o atrito viscoso entre o sólido e

o fluido. Quando aplicada, esta condição de contorno mantém a direção do movimento da partícula e inverte o sentido. Esta condição de contorno é bastante usada e garante condição de não-escorregamento, ou seja, velocidade do fluido é nula em paredes e obstáculos sólidos (WOLF, 2006).

A condição de contorno *bounce back* fornece as seguintes atribuições para cada uma das funções distribuições de partículas desconhecidas na parte inferior da Figura 20,

$$f_2 = f_6, \quad f_3 = f_7, \quad f_4 = f_8. \quad (7.11)$$

Procedimento análogo é feito para as funções desconhecidas na parede superior,

$$f_6 = f_2, \quad f_7 = f_3, \quad f_8 = f_4. \quad (7.12)$$

7.4 CONDIÇÃO DE ZOU E HE

Aborda-se, nesta seção, a condição de contorno de Zou e He (ZOU; HE, 1997), que permite determinar as funções distribuições de partículas desconhecidas por meio da equação da conservação da massa (5.31) e da quantidade de movimento (5.35). A proposta de Zou e He (1997) é encontrar uma maneira de especificar a vazão, a altura, a pressão ou a velocidade do escoamento na entrada e saída de um canal (também aplicável em tubos e placas paralelas), com auxílio da *bounce back* de não-equilíbrio.

Apresenta-se o cálculo das funções de distribuição desconhecidas na entrada e saída do canal, conforme observado na Figura 21, desconsiderando os nós que estão nos vértices da malha. O tratamento diferenciado para os quatro nós que estão nos vértices, será apresentado na seção 7.4.3.

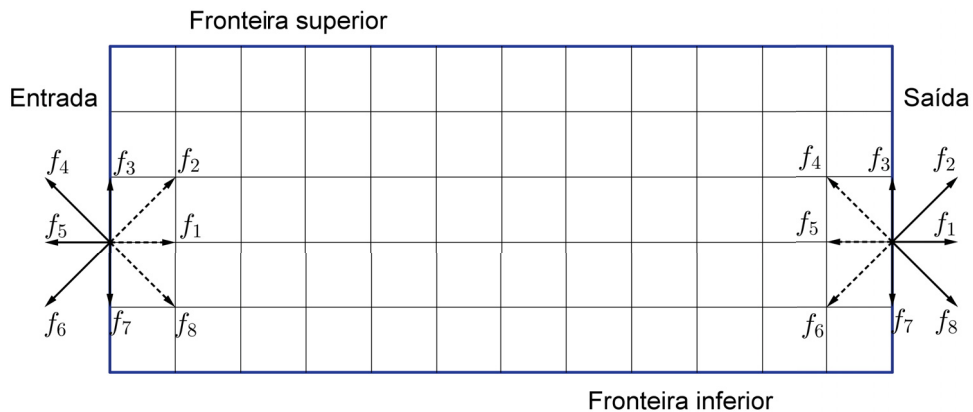


Figura 21 – Funções de distribuição desconhecidas na entrada e saída do canal.

A expressão (5.31) pode ser reescrita por,

$$h = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8, \quad (7.13)$$

assim, como (5.35) pode ser reescrita de acordo com o movimento do fluido nas direções x e y ,

$$e(f_1 + f_2 + f_8) = hu_x + e(f_4 + f_5 + f_6), \quad (7.14)$$

e

$$e(f_2 - f_8) = hu_y + e(f_6 + f_7) - ef_3 - ef_4. \quad (7.15)$$

Inicialmente, apresentam-se os cálculos para encontrar f_1 , f_2 e f_8 que são desconhecidas na entrada do canal. Para isto, as expressões dadas em (7.13), (7.14) e (7.15) serão utilizadas.

Isolando as funções de distribuição desconhecidas em (7.13), tem-se,

$$f_1 + f_2 + f_8 = h - (f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7). \quad (7.16)$$

Assim, forma-se o sistema (7.17) com duas equações e três variáveis.

$$\begin{cases} e(f_1 + f_2 + f_8) = hu_x + e(f_4 + f_5 + f_6), \\ e(f_2 - f_8) = hu_y + e(f_6 + f_7) - ef_3 - ef_4. \end{cases} \quad (7.17)$$

Para tornar o sistema (7.17) possível e determinado, usa-se *bounce back* de não-equilíbrio, ou seja, na direção perpendicular à entrada do canal é verificada a seguinte igualdade,

$$f_1^{neq} = f_5^{neq}, \quad (7.18)$$

onde f^{neq} é a notação para função distribuição de não-equilíbrio, que representa a diferença entre a função distribuição de partículas e a função distribuição de equilíbrio,

$$f_\alpha^{neq} = f_\alpha - f_\alpha^{eq}. \quad (7.19)$$

Segue de (7.18) e de (7.19) que,

$$f_1 - f_1^{eq} = f_5 - f_5^{eq}. \quad (7.20)$$

Em (7.20), f_5 é conhecida e calcula-se f_1^{eq} e f_5^{eq} por meio da expressão da função distribuição para águas rasas (5.26). Assim, f_1 resulta em,

$$f_1 = f_5 + \frac{2}{3e}hu_x. \quad (7.21)$$

Substituindo (7.21) no sistema (7.17), obtém-se a expressão para f_2 e f_8 ,

$$f_2 = f_6 + \frac{1}{2}(f_7 - f_3) + \frac{1}{2e}hu_y + \frac{1}{6e}hu_x. \quad (7.22)$$

$$f_8 = f_4 + \frac{1}{2}(f_3 - f_7) - \frac{1}{2e}hu_y + \frac{1}{6e}hu_x. \quad (7.23)$$

Portanto, as funções de distribuição desconhecidas na entrada do canal são calculadas por,

$$\begin{cases} f_1 = f_5 + \frac{2}{3e}hu_x, \\ f_2 = f_6 + \frac{1}{2}(f_7 - f_3) + \frac{1}{2e}hu_y + \frac{1}{6e}hu_x, \\ f_8 = f_4 + \frac{1}{2}(f_3 - f_7) - \frac{1}{2e}hu_y + \frac{1}{6e}hu_x. \end{cases} \quad (7.24)$$

Procedimento análogo é utilizado para encontrar as funções distribuição desconhecidas na saída do canal f_4 , f_5 e f_6 , conforme Figura 21, obtendo-se,

$$\begin{cases} f_5 = f_1 - \frac{2}{3e}hu_x, \\ f_4 = f_8 - \frac{1}{2}(f_3 - f_7) + \frac{1}{2e}hu_y - \frac{1}{6e}hu_x, \\ f_6 = f_2 + \frac{1}{2}(f_3 - f_7) - \frac{1}{2e}hu_y - \frac{1}{6e}hu_x. \end{cases} \quad (7.25)$$

O esquema apresentado nesta seção também é empregado em casos onde deseja-se obter vazão constante na entrada do canal e profundidade constante na saída do canal.

7.4.1 Condição de Vazão Constante na Entrada do Canal

Uma condição de contorno comum na entrada de um canal é estabelecer uma vazão constante. Para isso, é necessário adaptar o esquema apresentado na seção anterior. O novo esquema é baseado na conservação de massa e quantidade de movimento e realizado em duas etapas propostas por Liu (2009) e descritas a seguir.

Na primeira etapa, é aplicada a condição de contorno zero gradiente para as variáveis macroscópicas profundidade h e nas coordenadas de velocidade do escoamento u_x e u_y , isto é,

$$h(x_0, y) = h(x_1, y), \quad u_x(x_0, y) = u_x(x_1, y), \quad u_y(x_0, y) = u_y(x_1, y). \quad (7.26)$$

em que os nós da malha na direção x são $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ e de forma análoga para a direção y .

Na segunda etapa, é adicionado um novo termo $(Q_{in} - Q_c)/b$ na expressão (7.14), para obter,

$$e(f_1 + f_2 + f_8) - e(f_4 + f_5 + f_6) = hu_x + \frac{Q_{in} - Q_c}{b}, \quad (7.27)$$

em que, b é a largura do canal, Q_{in} é a vazão constante na entrada do canal, Q_c é a vazão calculada a partir de h , u_x e u_y obtidos na primeira etapa.

Utilizando o mesmo procedimento da seção 7.4, as funções distribuições f_1 , f_2 e f_8 ficam reformuladas da seguinte maneira,

$$\begin{cases} f_1 = f_5 + \frac{2}{3e}hu_x, \\ f_2 = f_6 + \frac{1}{2}(f_7 - f_3) + \frac{hu_y}{2e} + \frac{hu_x + (Q_{in} - Q_c)/b}{6e}, \\ f_8 = f_4 + \frac{1}{2}(f_3 - f_7) - \frac{hu_y}{2e} + \frac{hu_x + (Q_{in} - Q_c)/b}{6e}. \end{cases} \quad (7.28)$$

7.4.2 Condição de Profundidade Constante na Saída do Canal

Pode-se usar uma profundidade fixa na saída do canal como condição de contorno. Também são propostas por Liu (2009) adaptações para reescrever as funções distribuições de equilíbrio. O procedimento é análogo ao descrito na seção 7.4.1, novamente, duas etapas são necessárias.

A primeira etapa está relacionada com a aplicação do condição de contorno zero gradiente para as variáveis macroscópicas profundidade h , velocidades u_x e u_y do escoamento na saída do canal, ou seja,

$$\begin{aligned} h(x_n, y) &= h(x_n - 1, y), \\ u_x(x_n, y) &= u_x(x_n - 1, y), \\ u_y(x_n, y) &= u_y(x_n - 1, y). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Na segunda etapa, a profundidade que consta na expressão (7.25) será substituída por uma profundidade fixa h^* . Para incorporar h^* , Liu (2009) propõe a seguinte expressão para o cálculo da nova velocidade u^* na saída do canal,

$$u_x^* = \left[\frac{f_0 + f_3 + f_7 + 2(f_1 + f_2 + f_8)}{h^*} - 1 \right] e. \quad (7.30)$$

A velocidade na direção y é apresentada no seguintes termos,

$$u_y^* = \frac{u_y(x_n, y) h(x_n, y)}{h^*}. \quad (7.31)$$

Portanto, as funções distribuições de equilíbrio fornecidas em (7.25) ficam reescritas na forma de (7.32), para incorporar as características de profundidade fixa na saída do canal,

$$\begin{cases} f_5 = f_1 - \frac{2h^*u_x^*}{3e}, \\ f_4 = f_8 - \frac{1}{2}(f_3 - f_7) + \frac{1}{2e}h^*u_y^* - \frac{h^*u_x^*}{6e}, \\ f_6 = f_2 + \frac{1}{2}(f_3 - f_7) - \frac{h^*u_y^*}{2e} - \frac{h^*u_x^*}{6e}. \end{cases} \quad (7.32)$$

7.4.3 Tratamento Especial para os Nós nos Vértices da Malha Computacional

Os nós nos vértices da malha localizados na entrada e na saída do canal precisam de um tratamento especial, quando a condição de não escorregamento é aplicada nas paredes do canal. Isso ocorre, porque nos vértices o número de funções de distribuição desconhecidas é maior. Liu (2009) faz esta abordagem também com base no estudo de Zou e He (1997).

No vértice inferior da entrada do canal são conhecidas apenas f_5 , f_6 e f_7 , conforme Figura 22. As funções distribuição de partículas f_1 e f_3 são obtidas usando a técnica *bounce back* de não equilíbrio proposta por Zou e He (1997) e mencionada na seção 7.4. Sendo assim,

$$f_1 = f_5, \quad f_3 = f_7. \quad (7.33)$$

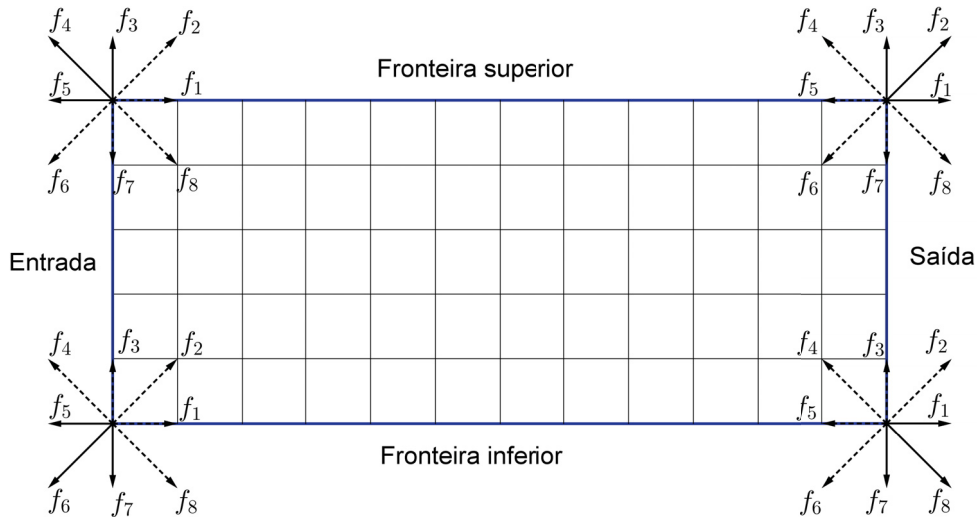


Figura 22 – Funções de distribuição desconhecidas nos vértices da malha.

Para determinar f_2 , f_4 e f_8 , substitui-se (7.33) em (7.14) e (7.15), obtendo,

$$\begin{cases} f_2 = f_6, \\ f_4 = f_8 = \frac{1}{2} [h - (f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_5 + f_6 + f_7)], \end{cases} \quad (7.34)$$

onde h é estimado por meio de uma média entre seus vizinhos. Nesta tese, utilizou-se os seguintes pontos para o vértice inferior na entrada do canal, $h(x_1, y_0)$, $h(x_1, y_1)$, $h(x_2, y_0)$ e $h(x_2, y_1)$. Deste modo, a segunda expressão de (7.34) fica reescrita da seguinte forma,

$$f_4 = f_8 = \frac{h_{EInf} - f_0}{2} - f_5 - f_6 - f_7, \quad (7.35)$$

onde,

$$h_{EInf} = \frac{h(x_1, y_0) + h(x_1, y_1) + h(x_2, y_0) + h(x_2, y_1)}{4}. \quad (7.36)$$

Assim, para o vértice inferior esquerdo, as funções distribuição desconhecidas, são obtidas por,

$$\begin{cases} f_1 = f_5, \\ f_3 = f_7, \\ f_2 = f_6, \\ f_4 = (h_{EInf} - f_0) / 2 - f_5 - f_6 - f_7, \\ f_8 = f_4. \end{cases} \quad (7.37)$$

Procedimento análogo foi estabelecido para o vértice superior na entrada do canal, resultando em,

$$\begin{cases} f_1 = f_5, \\ f_7 = f_3, \\ f_8 = f_4, \\ f_2 = (h_{ESup} - f_0) / 2 - f_3 - f_4 - f_5, \\ f_6 = f_2, \end{cases} \quad (7.38)$$

em que,

$$h_{ESup} = \frac{h(x_1, y_n - 1) + h(x_1, y_n) + h(x_2, y_n) + h(x_2, y_n - 1)}{4}. \quad (7.39)$$

Para todos os outros pontos, na entrada do canal, localizados entre os vértices, adota-se o procedimento descrito na seção 7.4.1 para o cálculos das variáveis desconhecidas f_1 , f_2 e f_8 .

Na saída do canal, procede-se de forma semelhante ao que foi feito para a entrada do canal. No vértice inferior direito da Figura 22, nota-se que f_2 , f_3 , f_4 , f_5 e f_6 não são conhecidas.

Para o vértice inferior na saída do canal, as funções distribuição de equilíbrio desconhecidas, são obtidas por meio de,

$$\begin{cases} f_3 = f_7, \\ f_5 = f_1, \\ f_2 = f_8, \\ f_4 = (h_0 - f_0) / 2 - f_1 - f_7 - f_8, \\ f_6 = f_2. \end{cases} \quad (7.40)$$

em que, h_0 é o valor fixo da altura da água na saída do canal.

Procedimento análogo foi estabelecido para o vértice superior na saída do canal para obter,

$$\begin{cases} f_5 = f_1, \\ f_7 = f_3, \\ f_6 = f_2, \\ f_4 = (h_0 - f_0) / 2 - f_1 - f_2 - f_3, \\ f_8 = f_4. \end{cases} \quad (7.41)$$

Nos demais pontos na saída do canal, localizados entre os vértices, procede-se como descrito na seção 7.4.2 para o cálculo das variáveis desconhecidas f_4 , f_5 e f_6 .

8 ESTUDOS DE CASO

São mostrados, neste capítulo, os resultados obtidos na simulação de problemas por meio do método do reticulado de Boltzmann. Inicialmente, são apresentados dois estudos de caso governados pelas equações de águas rasas. Em seguida, tem-se os resultados para os estudos de caso governados pelo modelo onda cinemática. A teoria desenvolvida para o LBM será aplicada de acordo com cada equação governante.

As simulações numéricas obtidas provêm dos seguintes estudos de caso:

- a) Simulação unidimensional de uma onda no mar próximo à costa em uma região relativamente curta, com leito regular e profundidade variável, por meio do LBM-BGK;
- b) Simulação bidimensional do escoamento de água ao redor de um cilindro localizado no centro de um canal com seção transversal retangular, por meio do LBM-MRT, com abordagem da turbulência e com sub-rotina de verificação das condições de estabilidade;
- c) Bacia Hidrográfica I. Neste estudo de caso, devido a homogeneidade, a bacia é aproximada por uma forma em “V” e segmentada por dois planos de iguais dimensões e um segmento de canal. Os dados da bacia hidrográfica são apresentados por Stephenson e Meadows (STEPHENSON; MEADOWNS, 1986). O reticulado usado para obter a simulação é o D1Q3, a chuva é igualmente distribuída em toda bacia e os resultados da simulação numérica foram comparados com os do modelo hidrológico KINEROS2;
- d) Bacia Hidrográfica II. A simulação numérica será realizada com base nos dados da bacia hidrográfica do rio Aquidauana, que é aproximadamente 7,5 vezes maior do que a bacia descrita no item (c). Devido a sua heterogeneidade, a bacia foi discretizada em 4 e 11 sub-bacias, onde cada sub-bacia é representada por uma forma em “V” segmentada em dois planos laterais e um segmento de canal. O reticulado usado para obter a simulação é o D1Q5, a chuva é igualmente distribuída em toda bacia e os resultados da simulação numérica foram comparados com os do modelo hidrológico KINEROS2;
- e) Bacia Hidrográfica III. Será apresentada a simulação de uma parte da bacia hidrográfica do rio Chopim que está inserida na bacia do rio Iguaçu. Fez-se a segmentação da bacia do rio Chopim em 9 sub-bacias até a estação Porto Palmeirinha. Cada sub-bacia é composta por um trecho de canal e dois planos laterais de escoamento,

com excessão da primeira sub-bacia que é representada por apenas um plano lateral. Utilizou-se o reticulado D1Q5. Diferentemente dos problemas (c) e (d), neste estudo de caso a chuva não é igualmente distribuída na bacia e os resultados numéricos foram comparados aos dados observados nas estações hidrométricas. Também é considerado o escoamento de base como condição inicial e condição de contorno.

Todas as simulações foram realizadas com o compilador GNU Fortran (GCC) 5.3.0 em um computador com processador i7 2,2 GHz, 16 GB de memória RAM e sistema operacional Windows10 64 bits.

8.1 SIMULAÇÃO DE UMA ONDA NO MAR PRÓXIMO À COSTA

8.1.1 Características do Problema

Neste estudo de caso, considera-se a propagação de uma onda em uma região costeira relativamente curta, com leito regular e profundidade variável. Empregam-se as equações de águas rasas unidimensionais para representar o escoamento de água em um canal de largura infinita. A geometria do escoamento é representada na Figura 23, onde $h(x, t)$ é a função que representa a altura acima do fundo do canal, $H(x)$ é a função que representa a profundidade, porém com referência a um nível fixo da água e $u(x, t)$ é a velocidade do escoamento na direção horizontal.

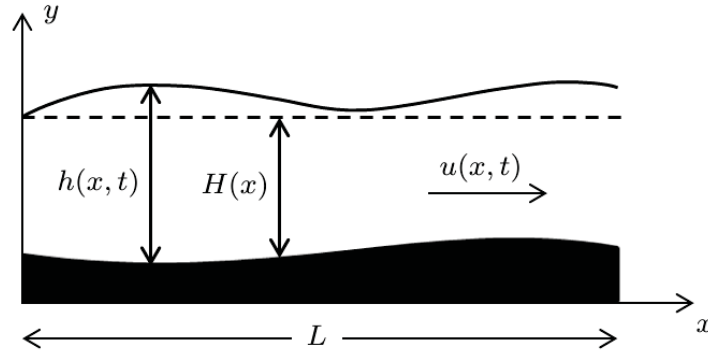


Figura 23 – Esquema para simulação do fluxo de maré

Bermudez e Vazquez (1994), determinam a solução analítica do problema por meio da análise assintótica, equação (8.1), juntamente com suas condições iniciais e de contorno, nas equações (8.2) e (8.3), respectivamente,

$$\begin{aligned} h(x, t) &= H(x) + \varphi(t), \\ q(x, t) &= h(x, t) u(x, t) = -\varphi'(t)(x - L) + \psi(t), \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= h_o(x), \\ q(x, 0) &= q_o(x), \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} h(0, t) &= \varphi(t), \\ q(L, t) &= \psi(t), \end{aligned} \quad (8.3)$$

onde h_o , q_o , φ e ψ são funções conhecidas.

Na simulação será considerado um comprimento $L = 16.000$ m. A função $z_b(x)$ que descreve o fundo do mar é obtida pela interpolação dos pontos da Tabela 1, com a utilização de spline cúbica.

Tabela 1 – Elevação do leito, $z_b(x)$

x (m)	0	474	1.053	4.000	6.000	7.000
$z_b(x)$ (m)	0	2,7	7	23	20	26
x (m)	8740	11.000	14.200	15.000	16.000	
$z_b(x)$ (m)	37	28	51,5	53	54	

Considera-se, ainda,

$$H(x) = 63 - z_b(x), \quad (8.4)$$

e, condições iniciais e de contorno,

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= H(x), \\ q(x, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} h(0, t) &= H(0) + 5 - 5 \operatorname{sen} \left[\pi \left(\frac{t}{20000} + \frac{1}{2} \right) \right], \\ q(L, t) &= 0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Portanto, na posição $x = 0$ e tempo $t > 0$, a função $\varphi(t)$ é escrita por,

$$\varphi(t) = 5 - 5 \operatorname{sen} \left[\pi \left(\frac{t}{20000} + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (8.7)$$

e, para $x = L$ e $t > 0$, a função $\psi(t)$ é dada por,

$$\psi(t) = 0. \quad (8.8)$$

A expressão de $h(0, t)$ em (8.6), simula uma onda de 5 m de amplitude.

Sob estas condições, a solução analítica é determinada pelas equações,

$$h(x, t) = H(x) + 5 - 5 \operatorname{sen} \left[\pi \left(\frac{t}{20000} + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (8.9)$$

e,

$$u(x, t) = \frac{(x - L)\pi}{4000 h(x, t)} \cos \left[\pi \left(\frac{t}{20000} + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (8.10)$$

8.1.2 Resultados e Discussões

Aplicou-se o LBM-BGK no problema em questão sem a abordagem da turbulência. A simulação é unidimensional, porém o reticulado utilizado é o D2Q9. É possível simular com código bidimensional desde que seja considerada a condição de contorno de deslizamento nas paredes do canal. Além disso, considera-se a condição de contorno de zero gradiente na entrada e saída do canal.

Os parâmetros utilizados no LBM são os seguintes: o comprimento do canal é $L = 16.000$ m, a quantidade de reticulados é 914, a velocidade no reticulado é $e = 200$ m/s e o parâmetro de relaxamento é $\tau = 0,6$. Com isso, tem-se o passo de tempo $\Delta t = 0,0875$ s. O parâmetro de relaxamento é obtido por meio da equação (5.38).

Como a massa da água é muito grande, os efeitos gravitacionais são preponderantes, podendo-se considerar desprezíveis os efeitos da resistência ao escoamento. Dessa forma, o termo de força dado em (5.7), fica determinado pela expressão $F = -gh(x, t)\partial z_b/\partial x$.

O número de iterações realizadas foi de 125.000, o que corresponde a um tempo de simulação de 10.937,5 s. O tempo de processamento gasto foi de 128 s.

As Figuras 24 e 25 mostram a comparação das soluções numérica e analítica para a superfície e velocidade da água em $t = 10.937,5$ s.

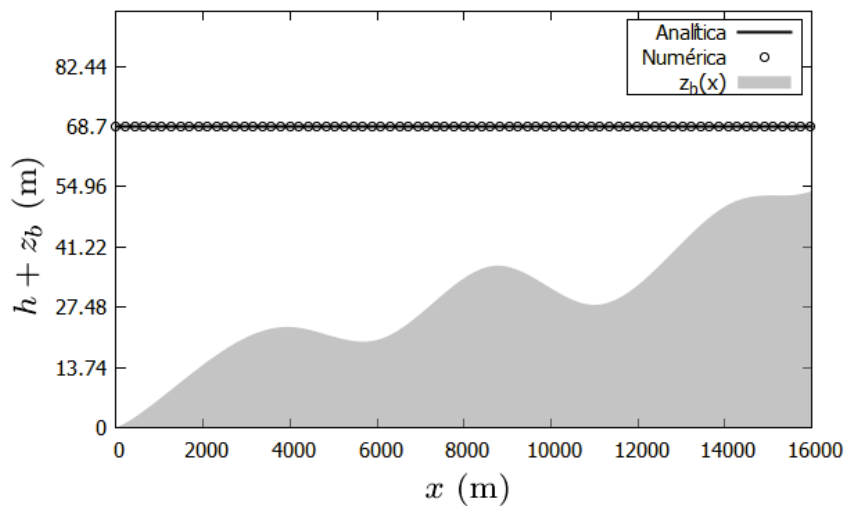


Figura 24 – Superfície da água em 10937,5 s

A comparação dos resultados numéricos com a solução analítica mostra que para a profundidade da água, o erro relativo máximo é menor que 0,5%. Para a velocidade, o erro relativo máximo é menor que 5% até a posição $x = 15.890$ m. E um erro maior

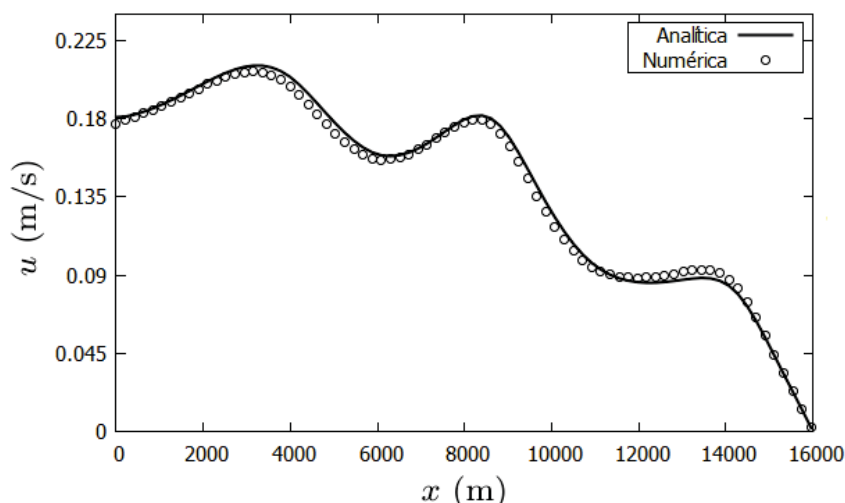


Figura 25 – Velocidade do escoamento em 10937,5 s

que 5% quando $x > 15.890$ m. Esse aumento no erro relativo à jusante, ocorre devido a imposição de a velocidade tender para zero quando x tende para 16.000 m. A velocidade torna-se muito pequena, não sendo o erro relativo adequado para a medida de precisão, normalmente utiliza-se o erro absoluto. Ao calcular o erro absoluto para as velocidades com erro relativo maior que 5%, obtém-se erro absoluto menor que 0,0004 m/s.

8.2 ESCOAMENTO AO REDOR DE UM CILINDRO LOCALIZADO NO CENTRO DE UM CANAL

8.2.1 Características do Problema

O estudo de caso abordado nesta seção é governado pelas equações de águas rasas e trata-se de um problema clássico na Engenharia Hidráulica. A água escoar ao redor de um cilindro, localizado perpendicularmente no fundo e no centro do canal. Este estudo foi apresentado por Yulistiyanto (YULISTIYANTO, 1997), onde encontra-se a comparação entre a solução numérica, por meio de diferenças finitas, e os dados experimentais. Em 2004, Zhou (ZHOU, 2004) repetiu a simulação utilizando o LBM com um tempo de relaxamento. Escoamento ao redor de pilares de pontes e ao redor de ilhas são exemplos reais em que este estudo pode ser aplicado.

8.2.2 Resultados e Discussões

Apresenta-se a simulação numérica bidimensional do escoamento de água ao redor de um cilindro localizado no centro de um canal retangular. O reticulado utilizado é o D2Q9. Adotou-se o operador de colisão com múltiplos tempos de relaxamento (MRT) e uma técnica de simulação em grandes escalas (LES) para melhorar a estabilidade. Incorporou-se ao código uma sub-rotina de estabilidade, que será aplicada em todos os pontos da malha

para cada passo de tempo. Como resultado, avalia-se o comportamento da profundidade da água, comparando-a com dados experimentais disponíveis na literatura.

Com relação as condições de contorno, nas paredes do cilindro é implementada a condição de contorno *bounce back* para representar velocidade nula, e nas paredes do canal utilizou-se condição de escorregamento. Na entrada do canal considera-se vazão constante, e na saída, é assumida altura fixa (ZHOU, 2004; LIU, 2009).

Neste estudo de caso, os parâmetros e características físicas do canal, e os resultados experimentais estão descritos em (YULISTIYANTO; ZECH; GRAF, 1998). O comprimento do canal é $L_x = 4$ m, a largura é $L_y = 2$ m, a vazão na entrada é $Q = 0,248$ m³/s, a altura da água na saída é $h = 0,185$ m, a inclinação do fundo do canal é $\partial z_b / \partial x = -6,25 \times 10^{-4}$ na direção do escoamento. O coeficiente de Manning é $n_b = 0,012$ m^{-1/3}s. A constante de Smagorinsky escolhida é $C_s = 0,3$ (ZHOU, 2004), $s_0 = \dots = s_6 = 1,0$ e $s_7 = s_8 = 1/\tau_t$ (PENG et al., 2014).

A simulação foi realizada utilizando-se passo espacial $\Delta x = \Delta y = 0,035$ m, o temporal $\Delta t = 0,007$ s, e o parâmetro de relaxamento $\tau = 0,6$. O número de iterações realizadas foi de 40.000, o que corresponde a um tempo de 280 s de medição, o qual é suficiente para alcançar a solução em regime permanente. O tempo de processamento gasto foi de 298 s.

A Figura 26 mostra o perfil da profundidade da água no centro do canal e na direção do escoamento, e os dados experimentais. O erro relativo na simulação é menor do que 1% no decorrer de todo o canal. Observa-se na Figura 27 que a profundidade da água aumenta ao se aproximar do cilindro e diminui logo depois do cilindro. Tem-se na Figura 28 a velocidade da água na direção do escoamento. Nota-se que a ela aumenta nas laterais do cilindro e atinge o valor mínimo logo depois do cilindro.

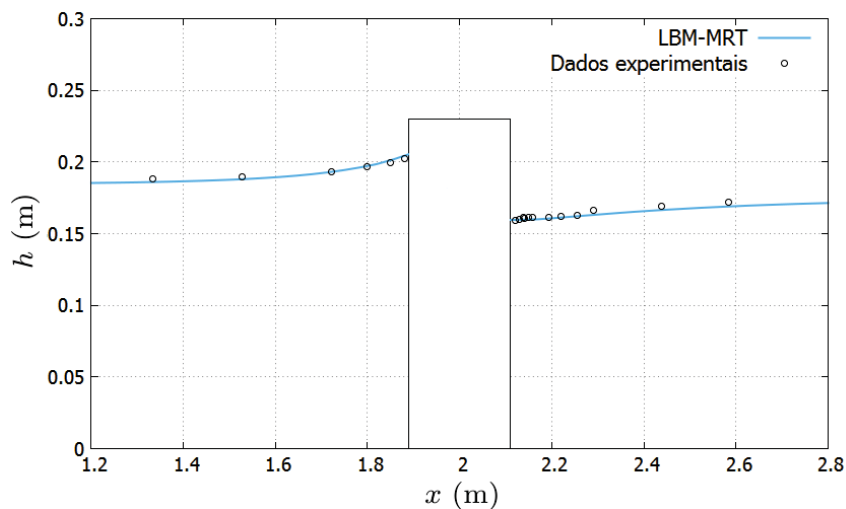


Figura 26 – Escoamento ao redor de um cilindro - Perfil da profundidade da água na linha central do canal na direção x .

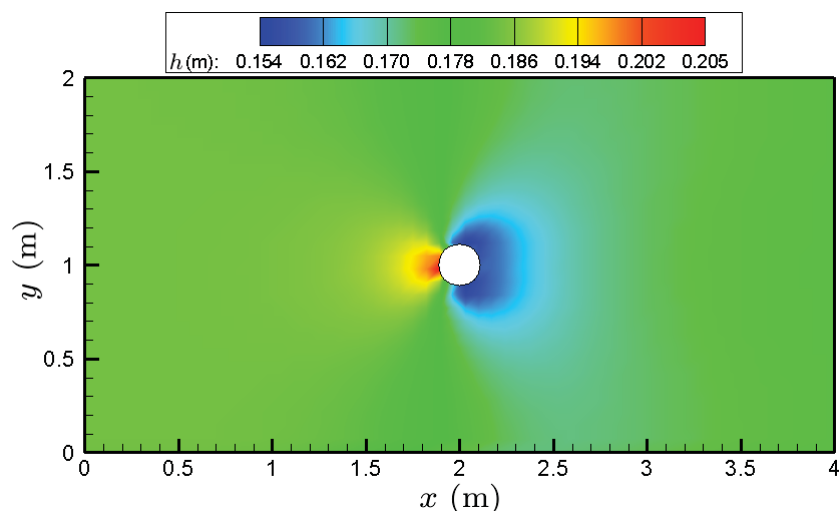


Figura 27 – Escoamento ao redor de um cilindro - Profundidade da água

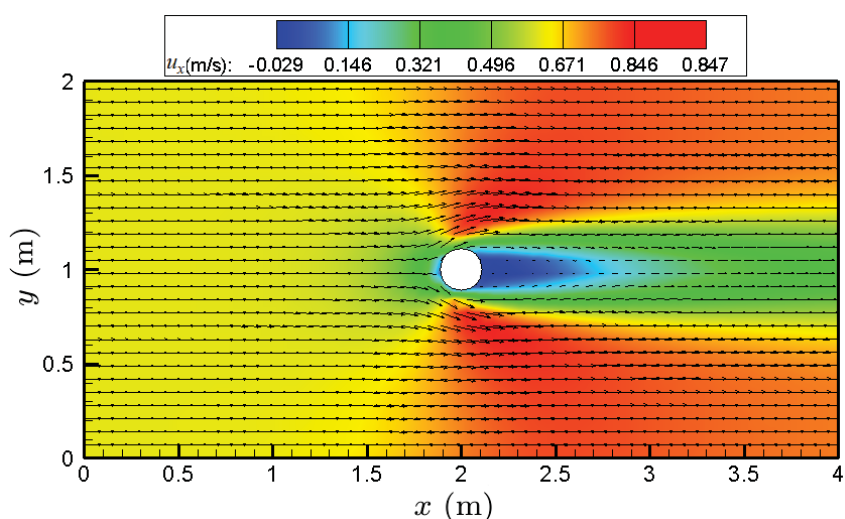


Figura 28 – Escoamento ao redor de um cilindro - Velocidade da água na direção x

A concordância entre os dados simulados e os dados experimentais mostra que o LBM-MRT é eficaz na simulação de escoamento de água ao redor de um cilindro localizado no centro de um canal retangular.

8.3 ESCOAMENTO EM BACIA HIDROGRÁFICA I

8.3.1 Características do Problema

A bacia hidrográfica consiste em uma área bem definida de captação natural da água de precipitação que faz convergir o escoamento até um curso de água. Na bacia hidrográfica, o escoamento é dividido em superficial e em canal. No escoamento superficial a água desloca-se pela superfície da bacia até encontrar um curso de água. Este deslocamento ocorre como resultado da água precipitada que não foi interceptada pela cobertura vegetal e pela parte que não infiltrou no solo. Devido a grande heterogeneidade espacial, a superfície da bacia é representada por planos onde ocorre o escoamento superficial de pouca

profundidade. A contribuição lateral nos canais é dada principalmente pela precipitação que ocorre sobre cada plano (TUCCI, 1998).

Neste estudo, considera-se a bacia hidrográfica mostrada na Figura 29 com área de drenagem de 0,834 km². O curso de água principal tem comprimento de 1.350 m e subdivide a bacia aproximadamente ao meio. Há outras vias fluviais menores, porém a maior parte do escoamento de captação é formado pelo escoamento superficial que chega até o canal principal. Dessa forma, a bacia é aproximada por uma forma em “V” e segmentada por dois planos de iguais dimensões e um segmento de canal, como ilustrado na Figura 30. Os coeficientes de Manning, declividades e dimensões dos segmentos estão listados na Tabela 2.

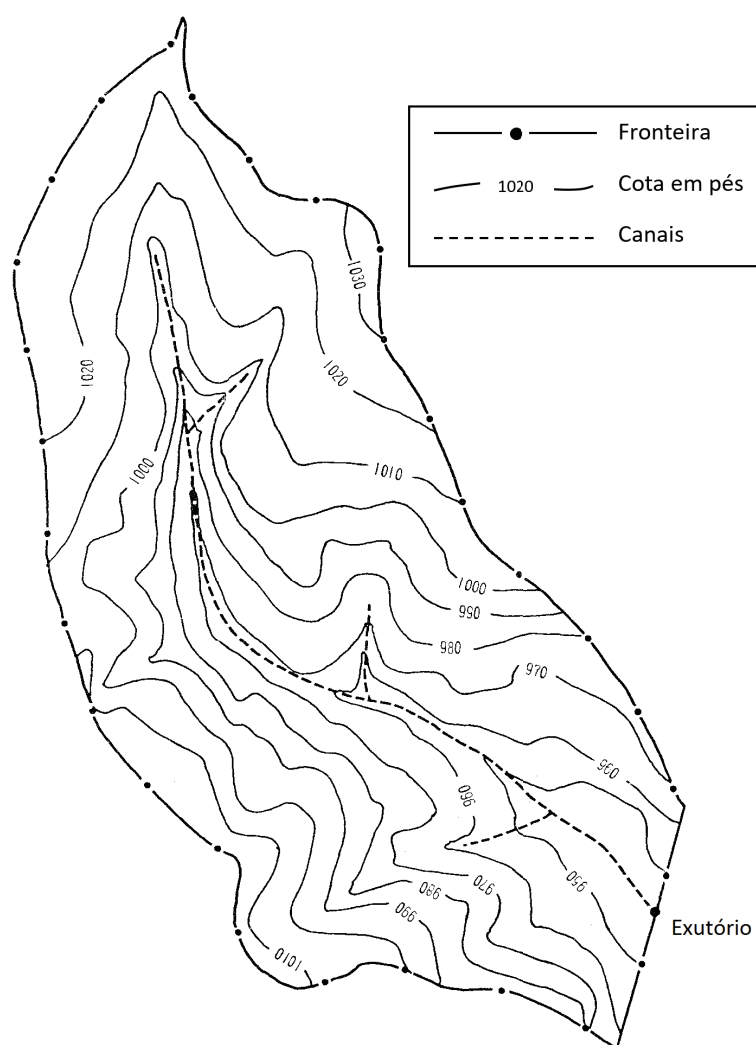


Figura 29 – Bacia hidrográfica natural
Fonte: Stephenson e Meadows (1986).

Para simulação do escoamento superficial em bacia hidrográfica, por meio do LBM, foram considerados dois eventos em que a chuva é igualmente distribuída na bacia, denominados evento 1 e evento 2, onde foram utilizadas precipitações excedentes ocorridos na bacia da Figura 29 em um intervalo de cinco anos de medições. Esses dados

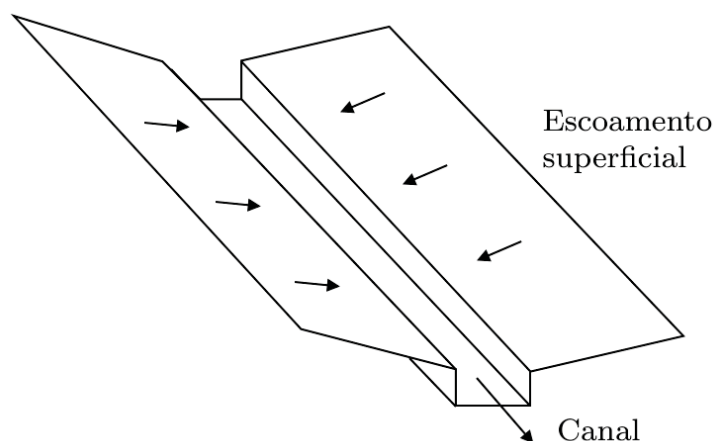


Figura 30 – Segmentação da bacia

Fonte: Stephenson e Meadows (1986).

Tabela 2 – Características físicas da bacia

Segmento	Comprimento L (m)	Largura b (m)	Manning n_b ($\text{m}^{-1/3}\text{s}$)	Declividade S_o (m/m)
Plano 1	308,9	1.350	0,15	0,05
Plano 2	308,9	1.350	0,15	0,05
Canal	1.350	3	0,15	0,012

Fonte: Stephenson e Meadows (1986).

são apresentados por Stephenson e Meadows (STEPHENSON; MEADOWNS, 1986). No primeiro evento, utiliza-se apenas a intensidade de chuva 12,7 mm/h com tempo de duração de 1,2 h, que é o mesmo evento descrito por Stephenson e Meadows (STEPHENSON; MEADOWNS, 1986), no qual os autores aplicam métodos gráficos para obtenção do hidrograma no exutório da bacia. No segundo evento são utilizados dados de quatro intervalos de excesso de precipitação. Esses valores são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Excesso de intensidade de chuvas

Evento	Duração da Chuva (h)	Precipitação excedente (mm/h)
1	1,2	12,70
2	1,0	13,99
	0,6	17,55
	1,2	12,70
	1,4	11,63

Fonte: Stephenson e Meadows (1986).

8.3.2 Resultados e Discussões

Em ambos os eventos de chuva os parâmetros utilizados no LBM são os mesmos e estão resumidos na Tabela 4, sendo N o número de reticulados que discretizam cada plano e o segmento de canal. Estes parâmetros são estabelecidos respeitando as condições de

estabilidade descritas nas seções 5.1.3 e 6.2.3, buscando manter baixo o valor do parâmetro de relaxamento e evitar o alto custo computacional.

Tabela 4 – Parâmetros da simulação no LBM

Segmento	Comprimento L (m)	Número de Reticulados N	e (m/s)	τ	Δx (m)	Δt (s)
Plano 1	308,9	62	5	0,95	5	1
Plano 2	308,9	62	5	0,95	5	1
Canal	1.350	270	5	0,95	5	1

Cada plano de escoamento é computado separadamente, em seguida utilizam-se os hidrogramas obtidos para entrar com a contribuição lateral no canal. O número de iterações realizadas no evento 1 foi de 25.200, o que corresponde a um tempo de 7 horas. Para o evento 2 o número de iterações realizadas foi de 36.000, correspondendo a um tempo de simulação de 10 horas. O tempo de processamento gasto em cada evento foi menor que 1 minuto.

As condições de contorno usadas neste estudo de caso foram apresentadas na seção 7.1, o reticulado é o D1Q3 e os outros elementos referentes a aplicação do LBM foram apresentados nas seções 6.2.1 e 6.2.2.

Os resultados obtidos pelo LBM são comparados com o modelo KINEROS2 (Kinematic Runoff and Erosion Model) o qual foi desenvolvido no final da década de 1960 pelo USDA (United States Department of Agriculture). KINEROS2 é um modelo chuva-vazão-erosão cinemático, distribuído e de base física aplicável à bacias hidrográficas com predominância de escoamento superficial. A bacia é representada por uma cascata de planos e canais, sobre os quais o escoamento é encaminhado de cima para baixo usando uma solução de diferenças finitas das equações de ondas cinemáticas unidimensionais (WOOLHIER; SMITH; GOODRICH, 1990). A aplicação KINEROS2 é escrita em linguagem Fortran com código fonte aberto. Os dados, como precipitação e características físicas da bacia, são atribuídos ao modelo por meio de arquivos texto. A Figura 31 ilustra como o KINEROS2 representa uma bacia hidrográfica.

Os hidrogramas na Figuras 32 e 33 apresentam, no exutório, a variação da vazão em relação ao tempo correspondente a resposta da bacia hidrográfica a precipitação efetiva em cada evento simulado. Os resultados obtidos pelo LBM e KINEROS2 estão ilustrados na Tabela 5, que fornece para cada evento os valores de vazão de pico e o tempo onde o pico ocorre, o volume esperado e o volume calculado no exutório, e o erro relativo entre estes volumes.

Os valores de vazão de pico mostrados na Tabela 5 correspondentes ao evento 1, 2,61 m³/s e 2,59 m³/s, respectivamente calculados pelo LBM e KINEROS2, são menores daquele calculado por Stephenson e Meadows (STEPHENSON; MEADOWNS, 1986) que

Walnut Gulch Subwatershed No. 11 showing the watershed boundary and primary channel network (the pond catchment is a noncontributing area).

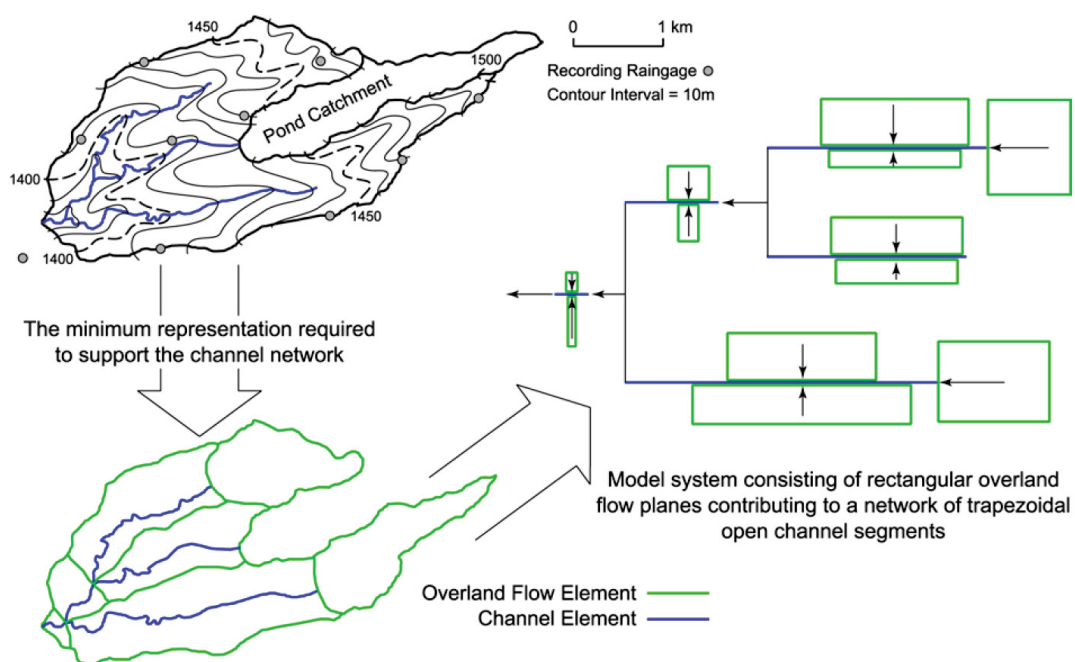


Figura 31 – Representação da bacia conforme KINEROS2

Fonte: Semmens et al. (2008).

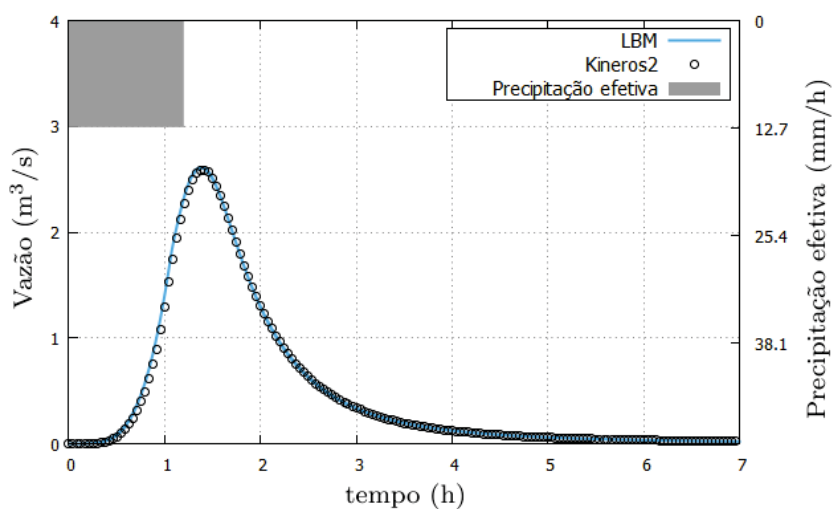


Figura 32 – Hidrograma do evento 1

Tabela 5 – Comparativo LBM × KINEROS2

Evento	Modelo	Vazão de pico (m³/s)	Tempo de pico (min)	Volume esperado no exutório (m³)	Volume calculado no exutório (m³)	Erro relativo (%)
1	LBM	2,61	82,93	12.710	12.340	2,99
	KINEROS2	2,59	83,92	12.710	12.162	4,50
2	LBM	3,76	108,20	46.739	46.170	1,23
	KINEROS2	3,78	109,17	46.739	46.175	1,22

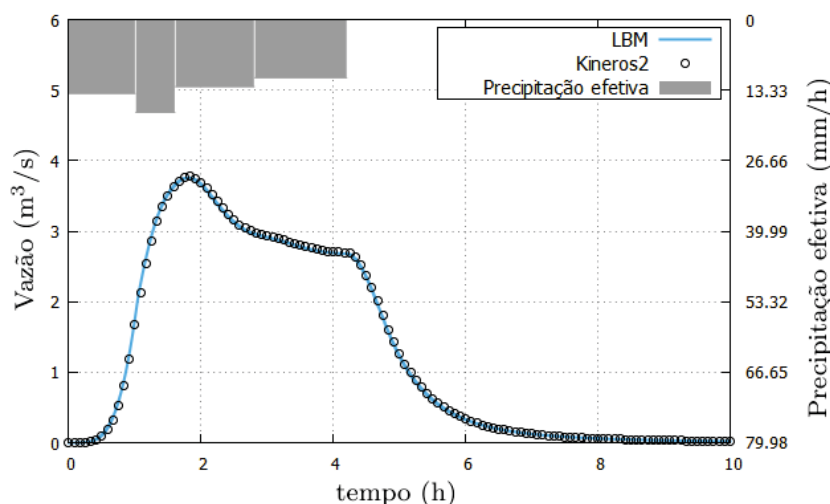


Figura 33 – Hidrograma do evento 2

é de 2,70 m³/s. Essa diferença é atribuída ao fato dos autores utilizarem métodos gráficos para o cálculo do hidrograma.

Nota-se pelos hidrogramas apresentados na Figuras 32 e 33, e pelos resultados listados na Tabela 5, que o LBM e KINEROS2 apresentam excelente concordância na simulação do escoamento superficial da bacia hidrográfica apresentada.

Nesta tese, propõe-se um modelo baseado no LBM, em que são utilizadas duas funções distribuição de equilíbrio, uma adequada para o escoamento em planos que representam a superfície da bacia, e a outra para o segmento de canal que representa o canal principal. Cada função distribuição de equilíbrio foi construída de modo a recuperar as equações do modelo onda cinemática adequadas para o escoamento no canal e nos planos, e foram obtidas por meio da expansão de Chapman-Enskog em escalas de tempo. A função distribuição de equilíbrio construída para o canal permitiu obter a área da seção transversal do canal, e a partir da área, calcula-se a vazão Q por meio da relação apresentada em (3.22). A função distribuição de equilíbrio construída para os planos fornece a profundidade da água, e a partir da profundidade, obtém-se a vazão por unidade de largura q por meio da relação estabelecida em (3.23). Como resultado, tem-se o hidrograma da bacia hidrográfica para os dois eventos escolhidos.

As simulações obtidas a partir do modelo proposto mostram excelente concordância com o modelo hidrológico KINEROS2 quanto a vazão de pico, a distribuição temporal das vazões e também do volume total escoado. Portanto, o modelo proposto, mostrou-se adequado e preciso na simulação de escoamento superficial em bacia hidrográfica. Nota-se que os valores calculados do volume escoado no exutório são menores que o volume esperado, isto ocorre devido a difusão numérica presente na simulação. Este estudo pode ser estendido a bacias maiores, sendo necessário considerar uma quantidade maior de segmentos de planos e canais para melhor representação das características da bacia.

cada sub-bacia é representada por uma forma em “V” segmentada em dois planos laterais denominados pd^1 e pe^2 , e um segmento de canal. Condições de contorno são aplicadas nas junções de sub-bacias para manter o volume de água, conforme descrito na seção 7.1. A caracterização física da bacia segmentada em quatro sub-bacias está descrita nas Tabelas 6 e 7, e a descrição da segmentação em onze sub-bacias esta listada nas Tabelas 8 e 9.

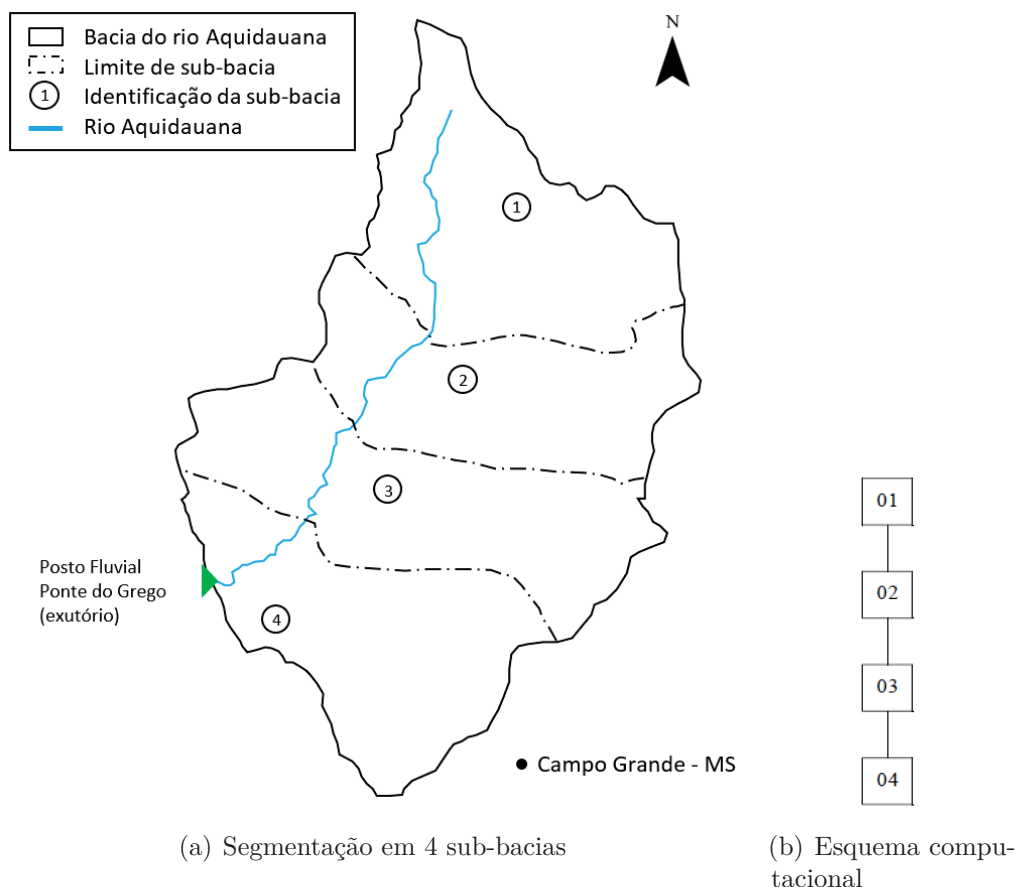


Figura 35 – Segmentação em 4 sub-bacias e esquema computacional da bacia do rio Aquidauana

Fonte: Adaptado de Costa Neto (2005).

Considerou-se um evento de chuva igualmente distribuída em toda bacia, com duração de 5 dias. As intensidades de chuva do primeiro até o quinto dia são: 4,60 mm/dia, 1,92 mm/dia, 1,55 mm/dia, 0,22 mm/dia e 0,57 mm/dia.

8.4.2 Resultados e Discussões

Os parâmetros da simulação no LBM para os planos são $\Delta x = 10$ m, $\Delta t = 10$ s e velocidade na malha $e = 1$ m/s. Com relação aos canais, $\Delta x = 50$ m, $\Delta t = 10$ s e velocidade na malha $e = 5$ m/s. Em ambos, o parâmetro de relaxamento utilizado é $\tau = 1,2$, e reticulado D1Q5. O número de iterações realizadas foi de 180.000, o qual representa

¹ pd: plano do lado direito no sentido do escoamento do rio.

² pe: plano do lado esquerdo no sentido do escoamento do rio.

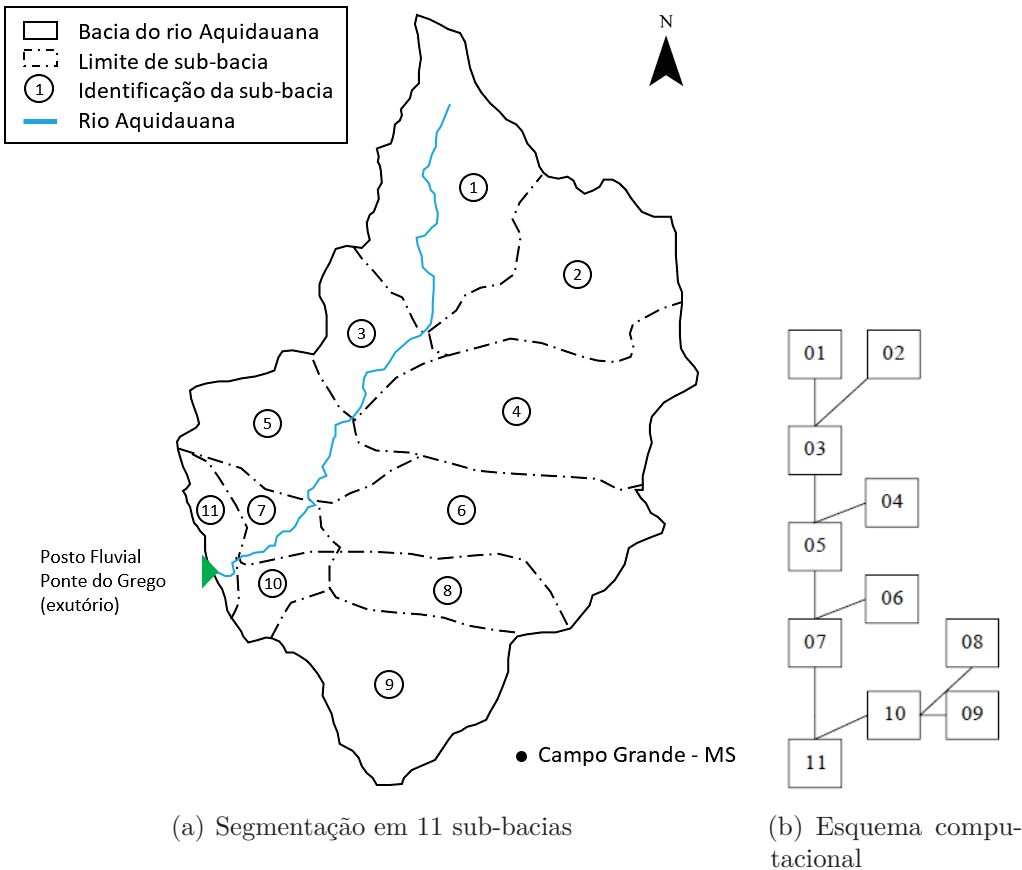


Figura 36 – Segmentação em 11 sub-bacias e esquema computacional da bacia do rio Aquidauana

Fonte: Adaptado de Costa Neto (2005).

Tabela 6 – Caracterização física dos planos das 4 sub-bacias do rio Aquidauana

Sub-Bacia	Plano	Comprimento L (m)	Largura b (m)	Declividade S_o (m/m)	Manning n_b ($m^{-1/3}s$)	Área (km^2)
1	pd	15.990	78.750	0,0786	0,073	1.259,44
	pe	5.120	78.750	0,0685	0,077	403,35
2	pd	39.170	27.300	0,0531	0,072	1.069,40
	pe	9.780	27.300	0,0818	0,069	267,10
3	pd	38.980	31.600	0,0630	0,073	1.231,90
	pe	15.390	31.600	0,0764	0,081	486,20
4	pd	56.640	25.150	0,0569	0,074	1.424,40
	pe	9.040	25.150	0,0807	0,083	227,30

Fonte: Costa Neto (2005).

um tempo de simulação de 500 horas. Em cada sub-bacia, cada plano de escoamento é computado separadamente, em seguida utilizam-se os hidrogramas obtidos para entrar com a contribuição lateral no segmento de canal. O hidrograma gerado da sub-bacia é utilizado para fornecer a vazão de entrada para a próxima sub-bacia.

Os resultados obtidos pelo LBM são comparados com o modelo KINEROS2. Os

Tabela 7 – Caracterização física dos canais das 4 sub-bacias do rio Aquidauana

Sub-Bacia	Comprimento do canal L (m)	Largura b (m)	Declividade S_o (m/m)	Manning n_b ($m^{-1/3}s$)	Área de drenagem (km^2)	Área de drenagem acumulada (km^2)
1	78.750	6,6	0,0037	0,07	1.662,79	1.662,79
2	27.300	18,3	0,0005	0,07	1.336,50	2.999,29
3	31.600	30,3	0,0008	0,07	1.718,10	4.717,39
4	25.150	43,5	0,0011	0,07	1.651,70	6.369,09

Fonte: Costa Neto (2005).

Tabela 8 – Caracterização física dos planos das 11 sub-bacias do rio Aquidauana

Sub-Bacia	Plano	Comprimento L (m)	Largura b (m)	Declividade S_o (m/m)	Manning n_b ($m^{-1/3}s$)	Área (km^2)
1	pd	6.880	78.750	0,0661	0,077	541,44
	pe	5.120	78.750	0,0685	0,077	403,35
2	pd	6.340	66.000	0,0794	0,070	418,40
	pe	4.540	66.000	0,1002	0,071	299,60
3	pd	1.610	27.300	0,0350	0,075	44,00
	pe	9.780	27.300	0,0818	0,069	267,10
4	pd	6.980	70.750	0,0572	0,072	493,60
	pe	7.520	70.750	0,0507	0,072	531,80
5	pd	3.650	31.600	0,0412	0,076	115,30
	pe	15.390	31.600	0,0764	0,081	486,20
6	pd	5.750	102.520	0,0646	0,073	590,00
	pe	5.140	102.520	0,0659	0,072	526,60
7	pd	3.750	17.250	0,0311	0,090	64,70
	pe	8.240	17.250	0,0738	0,083	142,10
8	pd	3.940	49.850	0,0783	0,070	196,50
	pe	3.860	49.850	0,0843	0,070	192,60
9	pd	7.810	64.090	0,0471	0,070	500,30
	pe	3.540	64.090	0,0738	0,070	226,90
10	pd	4.270	27.090	0,0303	0,089	115,70
	pe	1.680	27.090	0,0365	0,076	45,50
11	pd	10.410	7.900	0,0239	0,090	82,20
	pe	10.780	7.900	0,0923	0,083	85,20

Fonte: Costa Neto (2005).

hidrogramas nas Figuras 37 e 39 representam o escoamento no final das sub-bacias que compõem o canal principal. As Figuras 38 e 40 mostram os hidrogramas da descarga no exutório da bacia gerados pelo LBM e pelo KINEROS2.

O volume escoado equivalente aos cinco dias de precipitação efetiva é de $56,50 \times 10^6$ m^3 . Os resultados obtidos pelo LBM e KINEROS2 estão dispostos na Tabela 10.

Verifica-se pelos hidrogramas apresentados nas Figuras 38 e 40, e pelos valores

Tabela 9 – Caracterização física dos canais das 11 sub-bacias do rio Aquidauana

Sub-Bacia	Comprimento do canal L (m)	Largura b (m)	Declividade S_o (m/m)	Manning n_b ($m^{-1/3}s$)	Área de drenagem (km^2)	Área de drenagem acumulada (km^2)
1	78.750	2,0	0,0133	0,07	944,79	944,79
2	66.000	2,0	0,0150	0,07	718,00	718,00
3	27.300	7,8	0,0007	0,07	311,10	1.973,89
4	70.750	4,0	0,1351	0,07	1.025,40	1.025,40
5	31.600	21,9	0,0012	0,07	601,50	3.600,79
6	102.520	4,4	0,0221	0,07	1.116,60	1.116,60
7	17.250	39,2	0,0017	0,07	206,80	4.924,19
8	49.850	1,5	0,0593	0,07	389,10	389,10
9	64.090	2,8	0,0097	0,07	727,20	727,20
10	27.090	4,2	0,0014	0,07	161,20	1.277,50
11	7.900	39,2	0,0017	0,07	167,40	6.369,09

Fonte: Costa Neto (2005).

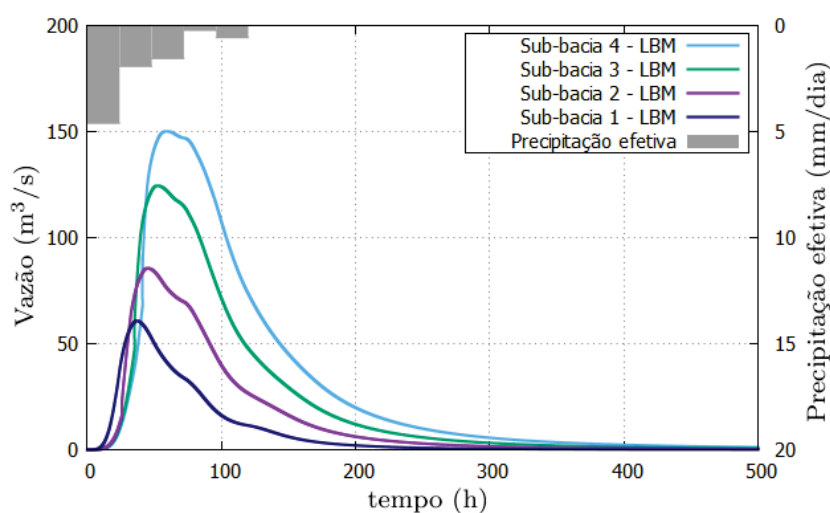


Figura 37 – Hidrogramas das sub-bacias - 4 segmentações

Tabela 10 – Comparativo LBM \times KINEROS2

Modelo	Qde. sub-bacias	Vazão de pico (m^3/s)	Tempo de pico (h)	Volume esperado no exutório $\times 10^6$ (m^3)	Volume calculado no exutório $\times 10^6$ (m^3)	Erro relativo (%)
LBM	4	150,16	59,15	56,50	55,23	2,25
KINEROS	4	150,93	61,83	56,50	55,46	1,83
LBM	11	258,25	39,32	56,50	56,08	0,62
KINEROS	11	257,16	38,37	56,50	55,98	0,81

descritos na Tabela 10, que os resultados obtidos no LBM-BGK mostram excelente concordância com o modelo hidrológico KINEROS2 quanto a vazão de pico, a distribuição temporal das vazões e também do volume total escoado. Há grande variação no pico de

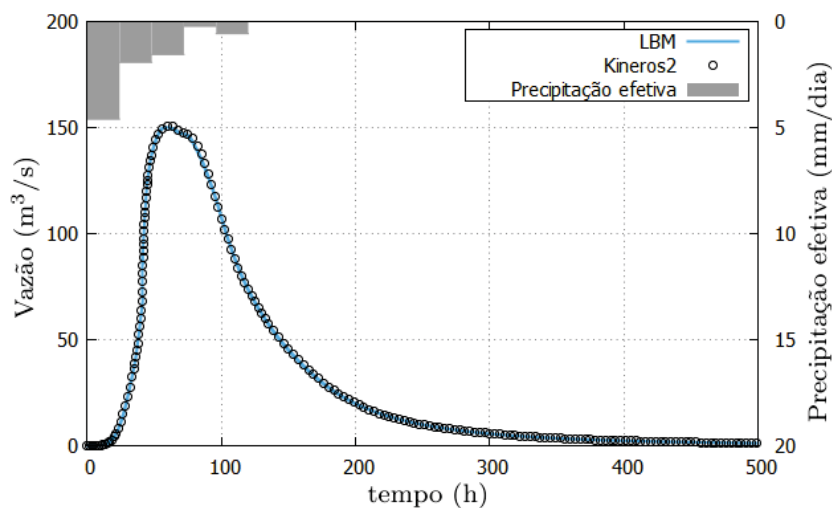


Figura 38 – Comparação entre LBM e KINEROS2 - 4 sub-bacias do rio Aquidauana.

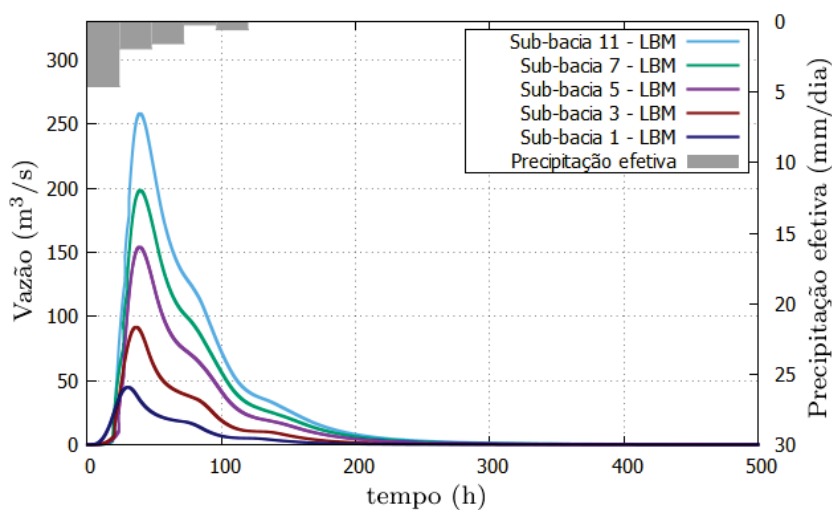


Figura 39 – Hidrogramas das sub-bacias - 11 segmentações do rio Aquidauana.

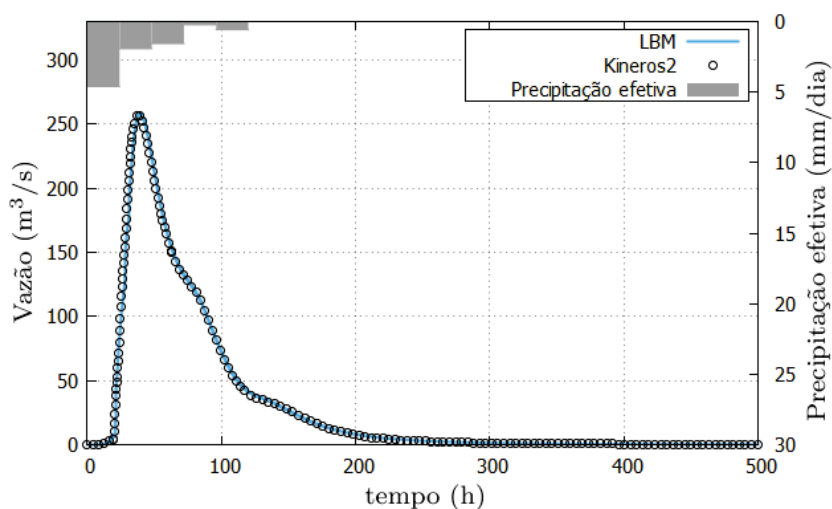


Figura 40 – Comparação entre LBM e KINEROS2 - 11 sub-bacias do rio Aquidauana.

vazão e no tempo de pico quando são consideradas mais segmentações. Essa variação é esperada visto que mais segmentações significa mais detalhamento das características

físicas da bacia. De fato, os resultados mostram que o erro relativo é menor quando aumenta-se o número de sub-bacias de 4 para 11. Portanto, o modelo proposto, no qual a bacia é segmentada em 4 e 11 sub-bacias, mostrou-se adequado e preciso na simulação de escoamento superficial em bacia hidrográfica.

8.5 ESCOAMENTO EM BACIA HIDROGRÁFICA III: RIO CHOPIM

Nesta seção, aplica-se o modelo LBM D1Q5 proposto na bacia do rio Chopim com as características descritas como segue.

8.5.1 Características do Problema

A bacia do rio Iguaçu (Figura 41) tem grande importância na geração de energia por meio de usinas hidrelétricas e pela grande demanda de recursos hídricos no abastecimento público, industrial e agrícola. Destacam-se as usinas hidrelétricas de Salto Santiago, Segredo, Salto Caxias e Salto Osório, que juntas têm produção de 4.998 MW. A região ainda é caracterizada por um grande número de Unidades de Conservação. Localizado na bacia, o Parque Nacional do Iguaçu é reconhecido pela UNESCO como Patrimônio Natural da Humanidade. A bacia abriga também importantes corredores de biodiversidade, denominados “Iguaçu – Paraná”, no Sudoeste, e “Araucária” no Centro-Sul do Estado do Paraná (SEMA, 2010).

O rio Iguaçu é formado pelo encontro dos rios Iraí e Atuba na parte leste do município de Curitiba, na divisa com o município de Pinhais, sendo considerado o maior rio totalmente paranaense. Levando-se em conta as áreas do Brasil e da Argentina, a bacia do rio Iguaçu tem superfície aproximada de 70.800 km². Dentro do estado do Paraná sua área é de 54.820 km², com destaque para as Cataratas do Iguaçu onde encontram-se as maiores quedas em volume d’água do planeta que despencam em uma profunda fenda de erosão, a qual forma 272 saltos, com um desnível médio de 72 m e vazão média de 1.551 m³/s no município de Foz do Iguaçu (SEMA, 2010).

Dentro da bacia do rio Iguaçu está localizada a Bacia do rio Chopim que abrange uma área de 7.500 km² e desenvolve-se basicamente no sentido sudoeste-noroeste, aproximadamente entre os paralelos 25°30' e 26°40' de latitude sul e os meridianos 51°30' e 53°20' de longitude oeste. Seus limites estão entre as bacias do rio Uruguai ao sul e com bacias de afluentes do rio Iguaçu nas outras direções. Os rios Santana e Vitorino são os principais afluentes do rio Chopim e estão localizados na sua margem esquerda (CHAVASSE; SEOANE, 2009).

O rio Chopim é o mais importante afluente da bacia do baixo rio Iguaçu. Suas nascentes estão localizadas em altitudes que superam os 1.200 m. A extensão total do curso principal do rio é da ordem de 450 km. Da nascente do rio até em torno do km 209

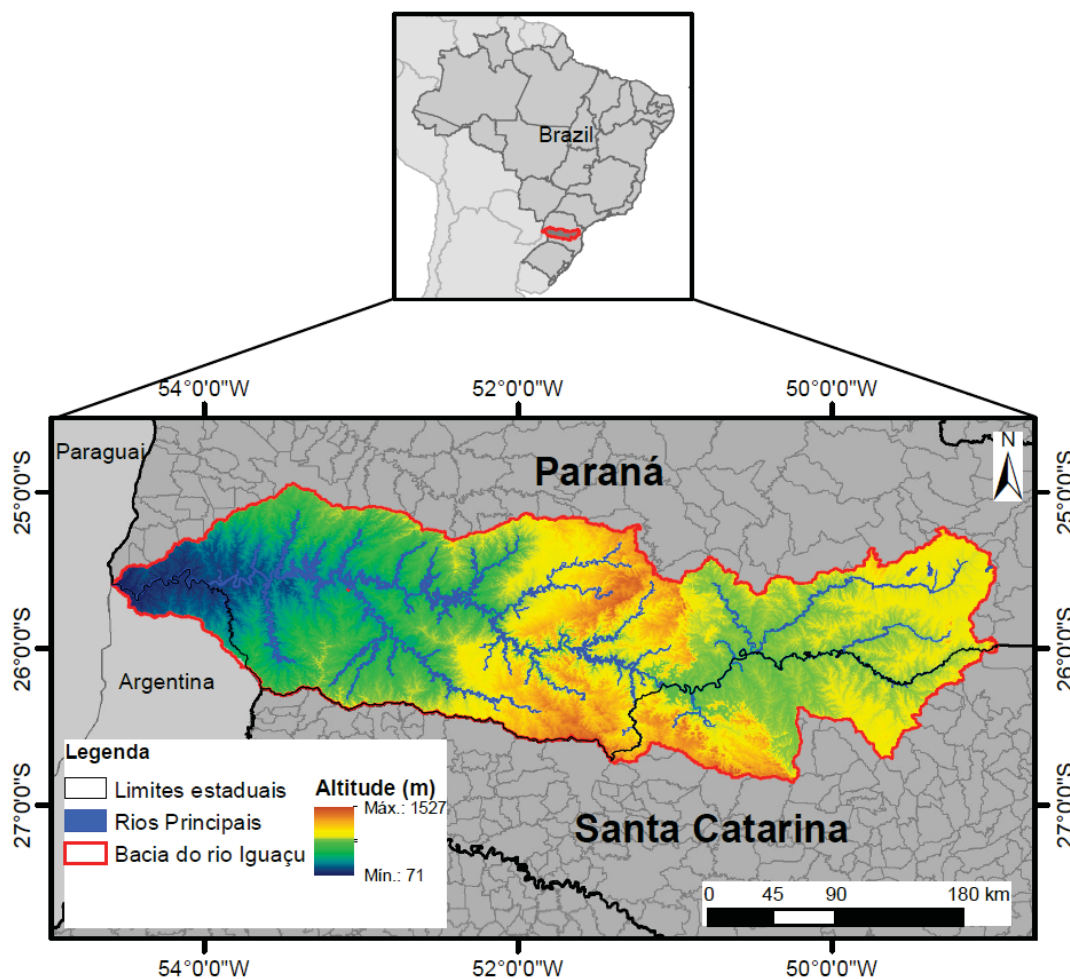


Figura 41 – Localização da bacia hidrográfica do rio Iguaçu

Fonte: Franco (2017).

a inclinação do leito é de aproximadamente 2,9 m/km, e desde este ponto até a foz, a inclinação é de aproximadamente 1,1 m/km (BURIAN, 2006).

O mapa hidrográfico na Figura 42 ilustra o rio Chopim (ao sul do estado) juntamente com os principais rios do Estado do Paraná.

Considera-se nesse estudo, um trecho do rio Chopim localizado entre suas nascentes no município de Palmas, passando pela estação pluviométrica Salto Claudelino até a estação fluviométrica Porto Palmeirinha. Este trecho do rio tem comprimento de aproximadamente 281 km com área de drenagem na superfície da bacia em torno de 3.205 km². As características das estações estão listadas na Tabela 11.

A Figura 43 ilustra os principais rios da bacia do rio Iguaçu, suas estações pluviométricas, meteorológicas e fluviométricas, e destaca a localização da bacia do rio Chopim.

A Figura 44 mostra a bacia do rio Chopim com as divisões de sub-bacias conforme (KAVISKI; GONÇALVES, 1996) definidas de acordo com as características físicas da bacia.

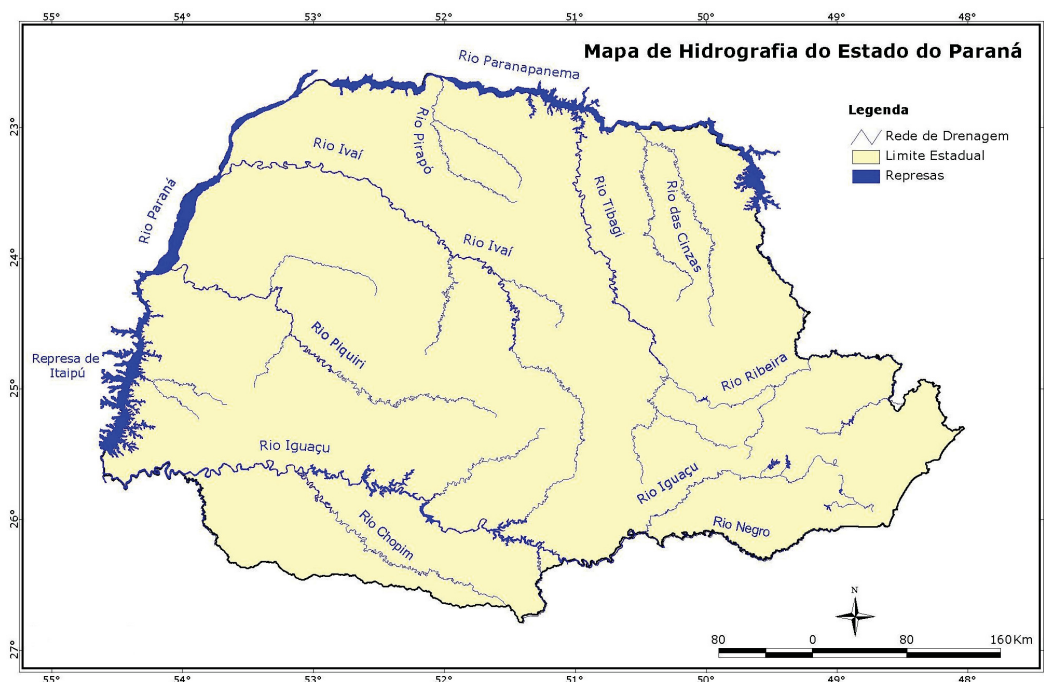


Figura 42 – Mapa hidrográfico do Estado do Paraná

Fonte: SEMA (2010).

Tabela 11 – Estações hidrométricas no rio Chopim

Nome	Código	Município	Latitude	Longitude	Altitude (m)	Área de contribuição (km ²)
Porto Palmeirinha	65927000	Coronel Vivida	-26,03	-52,63	501	3.390
Salto Claudelino	65925000	Clevelândia	-26,28	-52,30	797	1.660

Fonte: Franco (2017).

8.5.2 Resultados e Discussões

Levando-se em conta a delimitação das sub-bacias e os trechos de canais apresentados na Figura 44, fez-se a segmentação da bacia do rio Chopim em nove sub-bacias até a estação Porto Palmeirinha. Cada sub-bacia é composta por um trecho de canal e dois planos laterais de escoamento, com excessão da primeira sub-bacia que é representada por apenas um plano lateral. A numeração das sub-bacias foi mantida a mesma que a sequência utilizada para os trechos de canais. Essa numeração indica o início do escoamento até a estação fluviométrica Porto Palmeirinha. Os dados das características físicas da segmentação da bacia são apresentados na Tabela 12 para os segmentos planos, e na Tabela 13 para os segmentos de canais.

As condições iniciais e de contorno são as mesmas apresentadas na seção 7.1, porém para os trechos de canais não são conhecidos os valores da declividade e do coeficiente

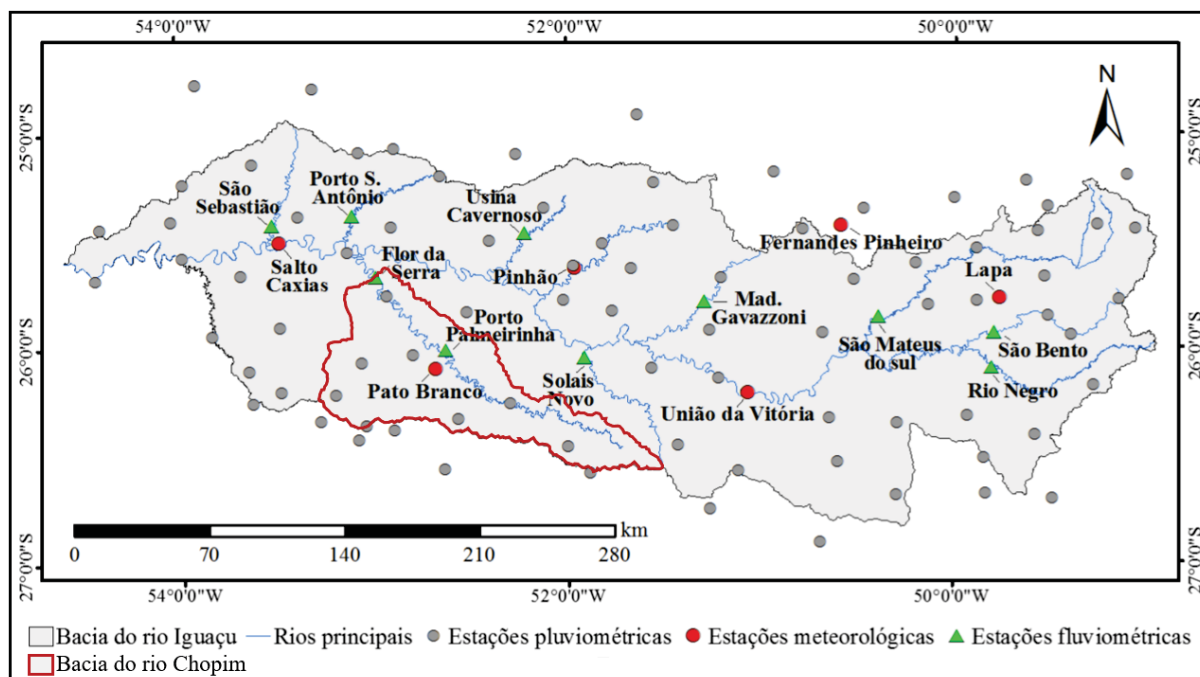


Figura 43 – Localização das estações pluviométricas, meteorológicas e fluviométricas da bacia hidrográfica do rio Iguaçu

Fonte: Adaptado de Uda (2016).

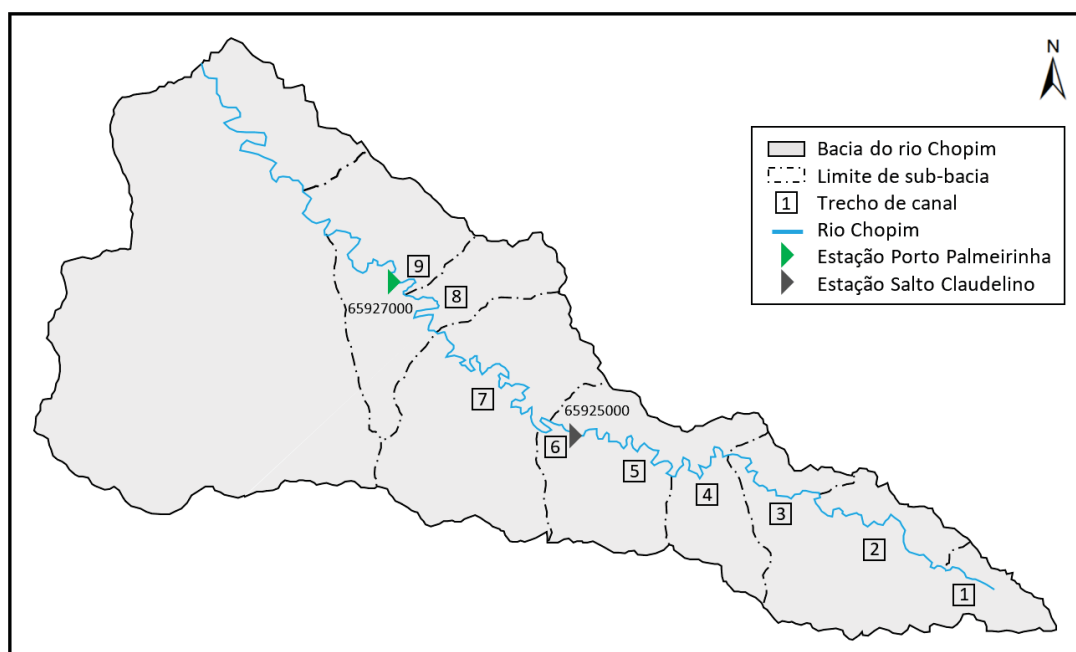


Figura 44 – Bacia hidrográfica do rio Chopim

Fonte: Adaptado de Kaviski e Gonçalves (1996).

de Manning. Para complementar a descrição das características físicas das sub-bacias hidrográficas, listam-se na Tabela 13 os parâmetros $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$, que descrevem as curvas de descarga. Conforme Kaviski e Gonçalves (1996), a relação entre área da seção transversal

Tabela 12 – Caracterização física dos planos das 9 sub-bacias do rio Chopim

Sub-Bacia	Plano	Comprimento L (m)	Largura b (m)	Declividade S_o (m/m)	Manning n_b (m ^{-1/3} s)	Área (km ²)
1	pd	-	-	-	-	-
	pe	6.940	26.830	0,0065	0,1200	186,20
2	pd	3.080	47.500	0,0266	0,0840	146,30
	pe	6.940	47.500	0,0065	0,1200	329,65
3	pd	3.300	30.170	0,0146	0,1044	99,56
	pe	6.940	30.170	0,0065	0,1200	209,38
4	pd	2.800	26.580	0,0102	0,2832	74,42
	pe	9.250	26.580	0,0129	0,2832	245,87
5	pd	2.800	41.670	0,0102	0,2832	116,68
	pe	6.780	41.670	0,0022	0,1020	282,52
6	pd	2.800	13.000	0,0102	0,2832	36,40
	pe	6.780	13.000	0,0022	0,1020	88,14
7	pd	5.180	65.000	0,0170	0,0972	336,70
	pe	9.670	65.000	0,0085	0,0972	628,55
8	pd	10.120	22.000	0,0113	0,0984	222,64
	pe	4.870	22.000	0,0129	0,1020	107,14
9	pd	6.720	8.180	0,0127	0,1032	54,97
	pe	4.870	8.180	0,0129	0,1020	39,84

Fonte: Kaviski e Gonçalves (1996).

Tabela 13 – Caracterização física dos canais das 9 sub-bacias do rio Chopim

Sub-Bacia	Comprimento do canal L (m)	Parâmetro $\bar{\alpha}$ (m ³ /s)	Parâmetro $\bar{\beta}$	Área de drenagem (km ²)	Área de dre- nagem acumu- lada (km ²)
1	26.830	0,04113596	1,59495580	186,21	186,21
2	47.500	0,85500771	0,87796837	475,86	662,07
3	30.170	1,01710784	0,86807752	308,94	971,01
4	26.580	1,45162356	0,83154649	320,33	1.291,34
5	41.670	2,55791569	0,76867062	399,15	1.690,49
6	13.000	2,47863913	0,77061510	124,52	1.815,01
7	65.000	2,32144856	0,77466167	965,27	2.780,28
8	22.000	2,14755607	0,77947050	329,82	3.110,10
9	8.180	2,09342670	0,78104723	94,78	3.204,88

Fonte: Kaviski e Gonçalves (1996).

e vazão é descrita pela equação,

$$A = \bar{\alpha} Q^{\bar{\beta}}, \quad (8.11)$$

onde, $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ são estimados pelo método dos mínimos quadrados utilizando valores do nível da água e da descarga, e também da elevação do fundo do canal e a área, medidos em

seções transversais.

Ao reescrever a equação (8.11) como vazão em função da área, tem-se,

$$Q = \frac{1}{\bar{\alpha}^{1/\bar{\beta}}} A^{1/\bar{\beta}}, \quad (8.12)$$

dessa forma, os parâmetros β_c e m_c descritos na seção 3.2 são determinados por,

$$\beta_c = \frac{1}{\bar{\alpha}^{1/\bar{\beta}}}, \quad m_c = \frac{1}{\bar{\beta}}. \quad (8.13)$$

Na junção de segmentos de canais, a área da seção transversal é encontrada diretamente pela equação (8.11).

Por não estarem disponíveis os dados de declividade e coeficiente de Manning dos trechos de canais da bacia do rio Chopim, houve a necessidade de adaptar o modelo para utilizar os parâmetros $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$. A vantagem em utilizar esses parâmetros é a de aplicar o LBM em um canal com seção transversal estimada pelas características naturais do rio.

Os parâmetros da simulação no LBM para os planos são $\Delta x = 10$ m, $\Delta t = 10$ s e velocidade na malha $e = 1$ m/s. Com relação aos canais, $\Delta x = 50$ m, $\Delta t = 10$ s e velocidade na malha $e = 5$ m/s. Em ambos, o parâmetro de relaxamento utilizado é $\tau = 1,2$. O número de iterações realizadas foi de 90.000, o que corresponde a um tempo de simulação de 250 horas ou 10,42 dias.

O período de chuva na bacia analisado é dado no mês 07 de 1987 nos dias 07 e 08. No mês 07 não houve chuva além dos dias citados. A Tabela 17 no Anexo A contém a intensidade média de precipitação em cada sub-bacia.

Para se obter uma simulação mais próxima da realidade, considerou-se uma vazão inicial que ocorre no rio (escoamento de base), em cada trecho de canal, antes de ocorrer a precipitação. Essa vazão entra no modelo computacional como uma condição inicial. Também é considerada como uma condição de contorno ao ser adicionada na contribuição lateral dos planos, em cada passo de tempo. A Tabela 18 no Anexo A, lista as vazões iniciais na seção transversal a montante e a jusante em cada trecho de canal. Utilizou-se interpolação linear para determinar os valores de vazões iniciais a cada $\Delta x = 50$ m no comprimento dos canais no instante inicial da simulação. Nos demais passos de tempo, o escoamento de base é incluído pela equação (8.14),

$$q_{base} = \frac{Q_j - Q_m}{L}, \quad (8.14)$$

em que Q_j e Q_m são, respectivamente, a vazão a jusante e a vazão a montante em um segmento de canal de comprimento L . A quantidade q_{base} é somada a contribuição lateral e uniformemente distribuída no comprimento do canal.

Os resultados obtidos pelo LBM são comparados com dados observados nas duas estações pertencentes ao trecho analisado. Nas Figuras 45 e 46, tem-se os hidrogramas simulado e observado nas estações Salto Claudelino e Porto Palmeirinha referentes a precipitação ocorrida no mês 07/1987.

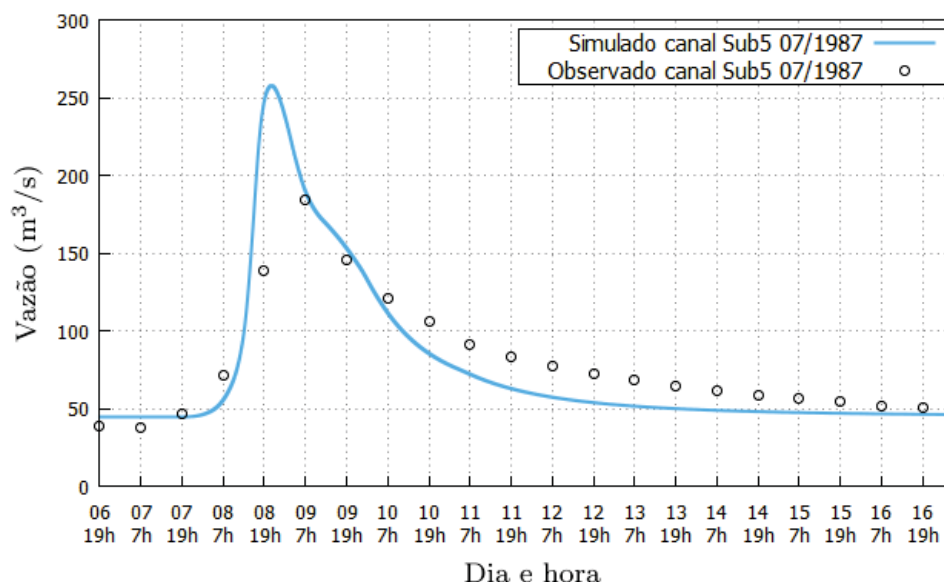


Figura 45 – Hidrograma na sub-bacia 5 - Estação Salto Claudelino

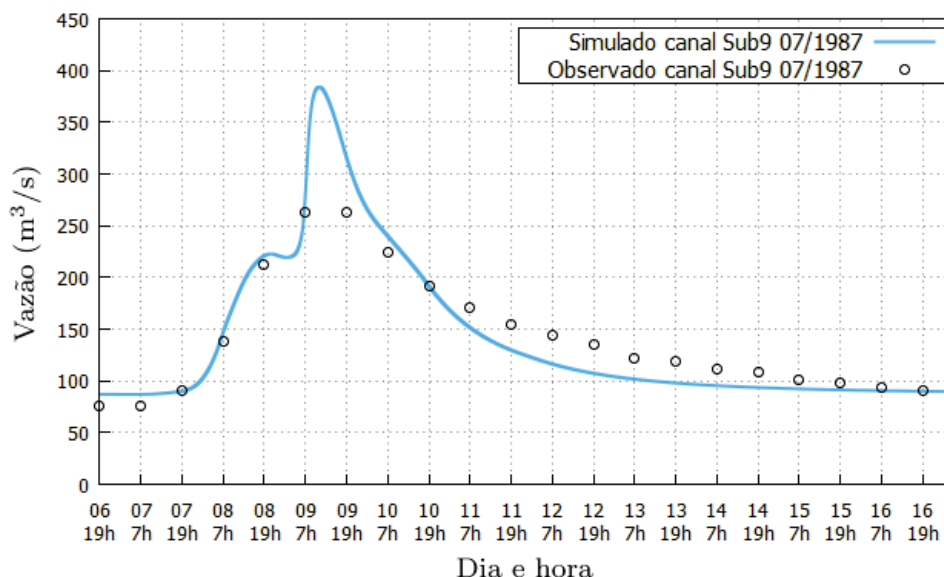


Figura 46 – Hidrograma na sub-bacia 9 - Estação Porto Palmeirinha

Os resultados obtidos mostram boa concordância entre a simulação por meio do LBM e os dados observados nas estações, tendo em vista que os dados observados foram coletados a cada 12 horas por leitura feita de forma visual em réguas ou escalas linimétricas fixadas nas margens dos rios para registro das variações no nível da água. Essas leituras são normalmente realizadas por moradores da região. Ainda, assume-se que a precipitação é igualmente distribuída nas últimas 12 horas.

Para quantificar a concordância entre os valores observados e simulados pelo LBM, considerou-se o coeficiente de correlação linear de Pearson r definido por (MARQUES; MARQUES, 2005),

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{\left[n \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \right] \left[n \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)^2 \right]}}, \quad (8.15)$$

onde X e Y são as variáveis em estudo, respectivamente, vazão observada e vazão simulada, n é o número de pares das observações.

O coeficiente de correlação linear r é adimensional e tem variação no intervalo $[-1, 1]$. Se $r = -1$ tem-se a correlação linear negativa perfeita, enquanto que se $r = 1$, tem-se a correlação linear positiva perfeita. Para $r = 0$ não há correlação linear entre as variáveis. Esse coeficiente pode ser avaliado quantitativamente como descrito na Tabela 14 (MARQUES; MARQUES, 2005).

Tabela 14 – Classificação do coeficiente linear de Pearson

Intervalo	Classificação
$0 < r < 0,3$	existe fraca correlação linear
$0,3 < r < 0,6$	existe moderada correlação linear
$0,6 < r < 0,9$	existe forte correlação linear
$0,9 < r < 1,0$	existe correlação linear muito forte

Fonte: Marques e Marques (2005).

As Figuras 47 e 48 mostram os gráficos de dispersão das vazões observadas pelas vazões simuladas pelo LBM. A reta tracejada, em ambos os gráficos, representa o ajuste perfeito com coeficiente $r = 1$.

O coeficiente de correlação linear de Pearson na sub-bacia 5 foi de $r = 0,88$ e na sub-bacia 9, de $r = 0,97$. Conforme a Tabela 14, existe forte correlação linear entre as variáveis na sub-bacia 5 e correlação linear muito forte para a sub-bacia 9. Conclui-se que há boa concordância entre as vazões observadas e simuladas. Nota-se na Figura 47 que um ponto está distante da reta, o que faz o coeficiente r ser um pouco menor.

Para fazer a verificação da significância estatística, foi aplicado o teste de hipóteses com a distribuição t de Student, supondo que os desvios padrões populacionais são desconhecidos e com variâncias equivalentes. A hipótese a ser testada é $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$, isto é, não existe diferença significativa entre as médias populacionais das vazões observadas e simuladas. Utilizou-se o software estatístico R. Os resultados obtidos estão resumidos na Tabela 15 para a sub-bacia 5 e na Tabela 16 para a sub-bacia 9.

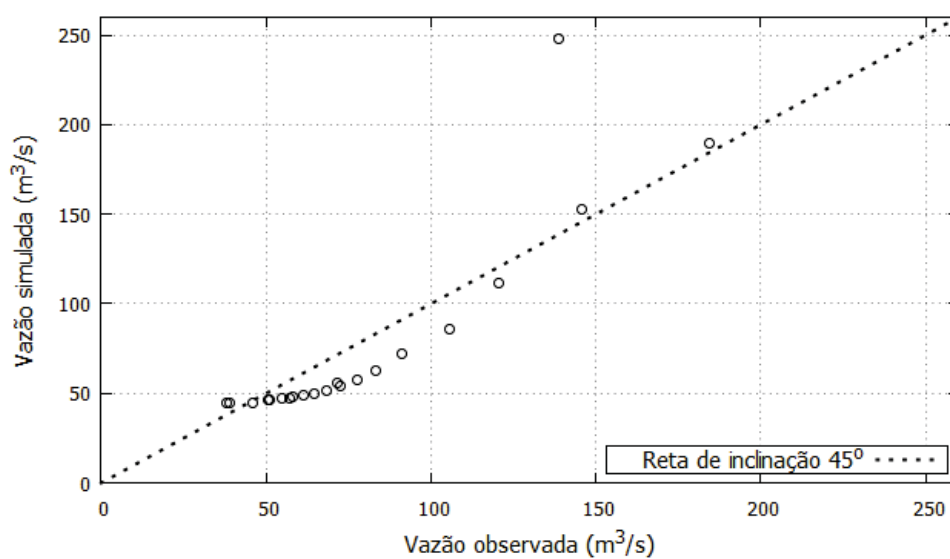


Figura 47 – Dispersão das vazões observadas e simuladas na sub-bacia 5 - Estação Salto Claudelino

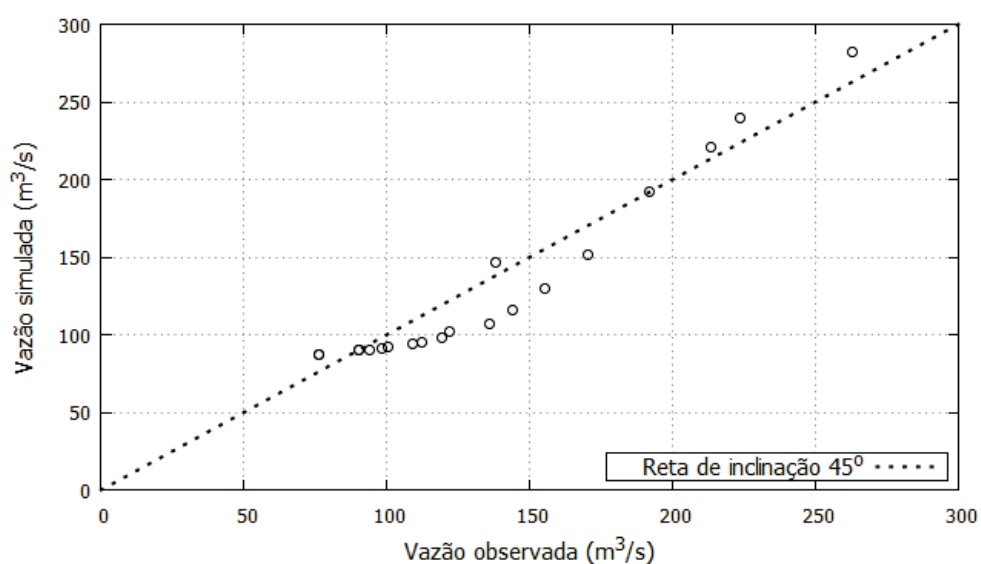


Figura 48 – Dispersão das vazões observadas e simuladas na sub-bacia 9 - Estação Porto Palmeirinha

Tabela 15 – Teste t de Student para a sub-bacia 5 - Salto Claudelino

Quantidades estatísticas	Observado	Simulado
Média	80,04	76,58
Variância	1.493,98	3.021,13
Observações	21	21
Graus de liberdade	40	
Estatística do teste	0,2361	
t crítico bi-caudal	2,0211	
Nível de significância	5%	

Tabela 16 – Teste t de Student para a sub-bacia 9 - Porto Palmeirinha

Quantidades estatísticas	Observado	Simulado
Média	142,12	139,02
Variância	3376,02	4864,39
Observações	21	21
Graus de liberdade	40	
Estatística do teste	0,1567	
t crítico bi-caudal	2,0211	
Nível de significância	5%	

Como mostram os testes realizados, a estatística do teste t é menor do que o valor do crítico bi-caudal, portanto aceita-se a hipótese H_0 , ou seja, não existe diferença significativa, ao nível de significância de 5% entre as vazões observadas e vazões simuladas.

9 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

9.1 CONCLUSÕES

Com a aplicação do LBM verificou-se que o uso do passo espacial e temporal unitários, permite escrever códigos mais simples e de fácil entendimento. No entanto, isso inviabiliza a maioria das simulações. Dessa forma, é necessário estabelecer uma relação entre Δt e Δx , sendo que esta relação pode assumir magnitudes diferentes, conforme o problema analisado. Valores não unitários são atribuídos ao passo espacial e temporal, desde que as condições de estabilidade sejam cumpridas de forma a reproduzir o escoamento e não gerar alto custo computacional.

Aplicações foram simuladas utilizando as equações de águas rasas com o objetivo de obter informações para aplicação do LBM em escoamento superficial. Porém, foi a partir de estudos realizados sobre a equação de Burgers no LBM que foi possível obter importantes resultados para utilização do modelo onda cinemática. Portanto, foi necessário adaptar o estudo desenvolvido para que fossem recuperadas as equações que governam o escoamento superficial.

Foram obtidas as funções distribuições de equilíbrio para que sejam recuperadas as variáveis macroscópicas desejadas, tanto para o escoamento nos planos bem como para os canais, por meio do LBM-BGK e utilizando dois reticulados unidimensionais distintos, o D1Q3 e o D1Q5. Cada função distribuição de equilíbrio foi construída de modo a recuperar as equações do modelo onda cinemática adequadas para a escoamento no canal e nos planos e foram obtidas por meio de uma expansão de Chapman-Enskog em escalas de tempo. A função distribuição de equilíbrio construída para o canal permitiu obter a área da seção transversal e, a partir da área, obteve-se a vazão Q por meio da relação apresentada em (3.22). A função distribuição de equilíbrio construída para os planos forneceu a profundidade da água e, a partir da profundidade, obteve-se a vazão por unidade de largura q por meio da relação estabelecida em (3.23). Outro ponto importante são as condições de contorno na junção dos segmentos de canais, que foram estabelecidas de forma a manter o volume de água na passagem de uma sub-bacia para outra.

O modelo proposto foi desenvolvido de forma que cada plano de escoamento e segmento de canal fossem simulados separadamente. Uma sub-bacia possui dois planos e um canal, portanto, eram executados três programas. Se a bacia fosse dividida em onze sub-bacias, seriam necessários executar 3×11 programas. Este processo tornou-se cansativo e demorado. Para sanar este inconveniente, um único programa foi escrito de maneira que o escoamento seja realizado de plano para canal, de sub-bacia para sub-bacia na ordem que descreva o escoamento simulado.

No problema proposto na seção 8.5, obteve-se uma simulação mais próxima da realidade com a consideração de escoamento de base, em cada trecho de canal, antes que ocorra a precipitação. Essa vazão entra no modelo computacional como uma condição inicial. Também é considerada como uma condição de contorno ao ser adicionada na contribuição lateral dos planos, em cada passo de tempo. Utilizou-se interpolação linear para determinar os valores de vazões iniciais a cada 50 m no comprimento dos canais no instante inicial da simulação. Nos demais passos de tempo, o escoamento de base é incluído pela equação (8.14). Os resultados obtidos pelo LBM foram comparados com dados observados nas duas estações pertencentes ao trecho analisado e mostram boa concordância, tendo em vista que os dados observados foram coletados a cada 12 horas por leituras feitas de forma visual em réguas fixadas nas margens dos rios para registro das variações no nível da água. Ainda, considera-se que a precipitação é igualmente distribuída nas últimas 12 horas.

A simulação na bacia do rio Chopim foi realizada utilizando os reticulados unidimensionais D1Q3 e D1Q5. As duas formas de implementação apresentam o mesmo nível de dificuldade e com custo computacional semelhante. Nota-se que a precisão entre eles está bem próxima, salientando apenas que no caso do reticulado D1Q5 ocorreu menos perda de volume, o que implica em melhor conservação da massa. Este ganho é esperado ao se utilizar um reticulado com mais direções de movimento.

Nos casos das simulações de bacias hidrográficas, verificou-se que o modelo proposto LBM-BGK responde de forma satisfatória, obedecendo às condições de estabilidade descritas nas seções 5.1.3 e 6.2.3 com baixo custo computacional, não sendo necessário implementar a simulação por meio do LBM-MRT.

9.2 PESQUISAS FUTURAS

Destacam-se algumas indicações de pesquisas de assuntos deixados em aberto ao longo da elaboração desta tese:

- Incorporar ao modelo desenvolvido os processos de infiltração, erosão e transporte de sedimentos;
- Devido a presença do processo de difusão nos escoamentos em bacias hidrográficas, pretende-se utilizar o modelo difusivo para o escoamento nos segmentos de canais, e manter o modelo onda cinemática nos planos de escoamento. O objetivo é verificar se a utilização do modelo difusivo juntamente com o modelo cinemático produz resultados mais próximos aos observados;
- Implementar cada sub-bacia em uma única malha computacional, pela aplicação do modelo onda cinemática bidimensional nos planos de escoamento e o modelo

onda cinemática ou difusivo para os segmentos de canal. E determinar condições de contorno para ajustar a passagem de escoamento de uma sub-bacia para outra;

- Adicionar características da bacia como área sem vegetação, com vegetação e umidade do solo ao modelo proposto;
- Determinar o escoamento em seção trapezoidal no lugar da seção retangular, nos casos em que não estejam disponíveis os dados medidos em campo para representação da seção transversal;
- Acoplar o modelo proposto a uma ferramenta de SIG (Sistemas de Informações Geográficas);
- Aplicar o modelo conforme projetos que têm a finalidade de contribuir para o planejamento de recursos hídricos em bacias hidrográficas.

REFERÊNCIAS

- ABE, T. Derivation of the lattice boltzmann method by means of the discrete ordinate method for the boltzmann equation. *Journal of Computational Physics*, v. 131, n. 241 - 246, 1997.
- AMARAL, F. R. d. *Estudo do efeito aeroacústico de um selo localizado na cova do eslate*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, 2015.
- AMATI, G.; SUCCI, S.; BENZI, R. Turbulent channel flow simulation using a coarsegrained extension of the lattice boltzmann method. *Fluid Dyn. Res.*, v. 19(5), p. 289 - 302, 1997.
- BAO, Y. B.; MESKAS, J. *Lattice Boltzmann Method for Fluid Simulations*. 2011.
- BENZI, R.; SUCCI, S.; VERGASSOLA, M. The lattice boltzmann equation: Theory and applications. *Physics Reports*, v. 222, n. 3, p. 145 - 197, 1992.
- BERMUDEZ, A.; VAZQUEZ, M. E. Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms. *Computers Fluids*, v. 23, n. 8, p. 1049 - 1071, 1994.
- BETTAIBI, S.; KUZNIK, F.; SEDIKI, E. Hybrid lattice boltzmann finite difference simulation of mixed convection flows in a lid-driven square cavity. *Physics Letters A*, v. 378, n. 32, p. 2429-2435, 2014.
- BHATNAGAR, P. L.; GROSS, E. P.; KROOK, M. A model for collision processes in gases. i. small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Physical Review*, v. 94, n. 3, p. 511 - 525, 1954.
- BOGO, R. L.; GRAMANI, L. M.; KAVISKI, E. Modelagem computacional do tráfego de veículos pela teoria microscópica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 37, n. 1, p. 1301, 2015.
- BUDINSKI, L. Mrt lattice boltzmann method for 2d flows in curvilinear coordinates. *Computers & Fluids*, v. 94, p. 288-301, 2014.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Análise Numérica*. 8. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2008.
- BURIAN, P. P. *Do estudo de impacto ambiental à avaliação ambiental estratégica - Ambivalências do processo de licenciamento ambiental do setor elétrico*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP - Brasil, Fevereiro 2006.
- CARGNELUTTI, J.; GALINA, V.; KAVISKI, E.; GRAMANI, L. M.; LOBEIRO, A. M. Two-dimensional numerical simulation of channel flow with submerged obstacles using the lattice boltzmann method. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 2017.
- CHAPMAN, S.; COWLING, T. *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases. An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases*. 3. ed. London: Cambridge University Press, 1970.
- CHAUDHRY, M. H. *Open-Channel Flow*. New York, USA: Springer, 2008.

- CHAVASSE, D. I.; SEOANE, R. S. Assessing and predicting the impact of el nino southern oscillation (enso) events on runoff from the chopim river basin, brazil. *Hydrological Processes*, n. 23, p. 3261–3266, 2009.
- CHEN, S.; CHEN, H. D.; MARTINEZ, D.; MATTHAEUS, W. Lattice boltzmann model for simulation of magnetohydrodynamics. *Physical Review Letters*, v. 67, p. 3776 – 3779, 1991.
- CHEN, S.; DOOLEN, G. D. Lattice boltzmann method for fluid flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 30(1), p. 329–364, 1998.
- CHOPARD, B.; DROZ, M. *Cellular Automata Modeling of Physical Systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- CHOPARD, B.; MASSELOT, A. Cellular automata and lattice boltzmann methods: a new approach to computational fluid dynamics and particle transport. *Future Generation Computer Systems*, v. 16, p. 249 – 257, 1999.
- CHOPARD, B.; PHAM, V. T.; LEFÈVRE, L. Asymmetric lattice boltzmann model for shallow water flows. *Computers & Fluids*, v. 88, p. 225 – 231, 2013.
- COSTA NETO, J. F. D. *Distribuição Espacial e temporal do escoamento Superficial em Bacias Hidrográficas*. Dissertação (Mestrado), 2005.
- CUNHA, M. C. C. *Métodos Numéricos*. 2. ed. [S.l.]: Editora da Unicamp, 2000.
- DAS, D.; RAY, A. A parallel encryption algorithm for block ciphers based on reversible programmable cellular automata. *Journal of Computer Science*, v. 1, n. 82-90, 2010.
- D'HUMIERES, D. Generalized lattice boltzmann equations. in rarefied gas dynamics: Theory and simulations, shizgal bd, weaver dp (eds). *Progress in Astronautics and Aeronautics*, v. 159, n. 450-458, 1992.
- FORTUNA, A. d. O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica de Fluidos*. 2. ed. São Paulo, SP: edusp, 2012.
- FRANCO, A. C. L. *Calibração do modelo SWAT com evapotranspiração proveniente de sensoriamento remoto e vazão observada*. Dissertação (Mestrado), Florianópolis - SC, 2017.
- FRISCH, U.; HASSLACHER, B.; POMEAU, Y. Lattice gas cellular automata for the navier-stokes equations. *Physical Review Letters*, v. 56, n. 14, p. 1505 –1508, 1986.
- GALINA, V.; CARGNELUTTI, J.; KAVISKI, E.; GRAMANI, L. M.; LOBEIRO, A. M. Simulação de onda de maré por meio do método do reticulado de boltzmann. In: UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ. *I Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia*. Curitiba - Brasil, 2016.
- GALINA, V.; CARGNELUTTI, J.; KAVISKI, E.; GRAMANI, L. M.; LOBEIRO, A. M. Application of lattice boltzmann method for surface runoff in watershed. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 2017.
- GILES, R. V. *Mecânica dos Fluidos e Hidráulica*. São Paulo: [s.n.], 1977.

- GOLBERT, D. R. *Modelos de Lattice-Boltzmann Aplicados à Simulação Computacional do Escoamento de Fluidos Incompressíveis*. Dissertação (Mestrado) — Laboratório Nacional de Computação Científica, Rio de Janeiro, 2009.
- GOLBERT, D. R. *Método de lattice Boltzmann em hemodinâmica computacional: interações fluido-estrutura e modelos acoplados 1D-3D*. Tese (Doutorado) — Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, RJ - Brasil, Abril 2013.
- GOLBERT, D. R.; BLANCO, P. J.; FEIJÓO, R. A. Tuning a lattice-boltzmann model for applications in computational hemodynamics. *Medical Engineering & Physics*, v. 34, p. 339–349, 2012.
- GRIBBIN, J. E. *Introduction to Hydraulics and Hydrology with Applications for Stormwater Management*. 3. ed. USA: Cengage Learning, 2008.
- GUO, Z.; ZHENG, C.; SHI, B. Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice boltzmann method. *Physical Review E*, v. 65, p. 1–6, 2002.
- HE, X.; LUO, L. Lattice boltzmann model for the incompressible navier-stokes equation. *J. Stat. Phys.*, v. 88, n. 1, p. 927 – 944, 1997b.
- HENDERSON, F. M. *Open Channel Flow*. New York: Macmillan, 1966.
- HIGUERA, F. J.; JIMÉNEZ, J. Boltzmann approach to lattice gas simulations. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 9, n. 7, p. 663 – 668, 1989.
- ILACHINSKI, A. *Cellular Automata: A Discrete Universe*. Singapore: World Scientific, 2001.
- ILIO, G. D.; CHIAPPINI, D.; UBERTINI, S.; BELLA, G.; SUCCI, S. Hybrid lattice boltzmann method on overlapping grids. *Physical Review E*, v. 95, n. 1, p. 013309, 2017.
- KARI, J. Theory of cellular automata: a survey. *Theoretical Computer Science*, v. 334, p. 3 – 33, 2005.
- KAVISKI, E.; GONÇALVES, L. F. A. *Análise Hidrológica e Matemática de Operação de Reservatórios*: Modelagem hidrologica da bacia do rio iguaçu entre salto osório e salto caxias; relatório n.1. Curitiba - PR, 1996.
- LALLEMAND, P.; LUO, L.-S. Theory of the lattice boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, galilean invariance, and stability. *Physical Review E*, v. 61, p. 6546–6562, 2000.
- LI, S.; HUANG, P.; LI, A. A modified lattice boltzmann model for shallow water flows over complex topography. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 77, p. 441 – 458, 2015.
- LI, Y.; HUANG, P. A coupled lattice boltzmann model for advection and anisotropic dispersion problem in shallow water. *Advances in Water Resources*, v. 31, p. 1719–1730, 2008.
- LIU, H. *Lattice Boltzmann Simulations for Complex Shallow Water Flows*. Tese (Doutorado) — University of Liverpool, Liverpool, Inglaterra, 2009.

- LIU, H.; LI, M.; SHU, A. Large eddy simulation of turbulent shallow water flows using multi-relaxation-time lattice boltzmann model. *international journal for numerical methods in fluids*, v. 70, p. 1573–1589, 2012.
- LIU, H.; WANG, H.; LIU, S.; HU, C.; DING, Y.; ZHANG, J. Lattice boltzmann method for the saint-venant equations. *Journal of Hydrology*, v. 524, p. 411 – 416, 2015.
- LUO, L.-s. *THE LATTICE-GAS AND LATTICE BOLTZMANN METHODS: PAST, PRESENT, AND FUTURE*. 2000.
- MARQUES, J. M.; MARQUES, M. A. M. *Estatística Básica para os Cursos de Engenharia*. [S.l.]: Domínio do Saber, 2005.
- MARTINS, C. C. *Autômato Celular Aplicado no Crescimento de Câncer*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, Brasil, 2010.
- MCNAMARA, G.; ALDER, B. Analysis of the lattice boltzmann treatment of hydrodynamics. *Physica A*, v. 194, p. 218 – 228, 1993.
- MCNAMARA, G. R.; ZANETTI, G. Use of the boltzmann equation to simulate lattice-gas automata. *Physical Review Letters*, v. 61, n. 20, p. 2332 – 2335, 1988.
- MELOTTI, G. *Aplicação de Autômatos Celulares em Sistemas Complexos: Um Estudo de Caso em Espalhamento de Epidemias*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, fevereiro 2009.
- MILLER, J. E. *Basic Concepts of Kinematic-Wave Models*. Washington: United States Government Printing Office, 1984.
- NOURGALIEV, R. R.; DINH, T. N.; THEOFANOUS, T. G.; JOSEPH, D. The lattice boltzmann equation method: Theoretical interpretation, numerics and implications. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 29(1), p. 117 – 169, 2003.
- PELLICCIONI, O.; CERROLAZA, M.; HERRERA, M. Análisis tridimensional de la interacción fluido-estructura en una válvula cardíaca mecánica doble hoja utilizando la ecuación generalizada de lattice boltzmann. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, v. 22, n. 4, p. 377–392, 2006.
- PENG, Y. *Lattice Boltzmann Simulations of Environmental Flow Problems in Shallow Water Flows*. Tese (Doutorado) — University of Liverpool, liverpool, Inglaterra, 2012.
- PENG, Y.; ZHANG, J. M.; ZHOU, J. G. Lattice boltzmann model using two relaxation times for shallow-water equations. *Journal of Hydraulic Engineering*, v. 142, n. 2, 2016.
- PENG, Y.; ZHOU, J. G.; BURROWS, R. Modelling solute transport in shallow water with the lattice boltzmann method. *Computers & Fluids*, v. 50, p. 181–188, 2011.
- PENG, Y.; ZHOU, J. G.; ZHANG, J. M.; BURROWS, R. modeling moving boundary in shallow water by lbm. *International Journal of Modern Physics C*, v. 24, n. 1, 2013.
- PENG, Y.; ZHOU, J. G.; ZHANG, J. M.; LIU, H. Lattice boltzmann modeling of shallow water flows over discontinuous beds. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 75, p. 608–619, 2014.

- PHILIPPI, P. C.; HEGELE, L. A.; SANTOS, L. dos; SURMAS, R. From the continuous to the lattice boltzmann equation: The discretization problem and thermal models. *Physical Review E*, v. 73, n. 5, parte 2, 2006.
- PORTO, R. M. *Hidráulica Básica*. 4. ed. São Carlos: EESC-USP, 2006.
- PRESTININZI, P.; MONTESSORI, a.; ROCCA, M. L.; SCIORTINO, G. Simulation of arrested salt wedges with a multi-layer shallow water lattice boltzmann model. *Advances in Water Resources*, v. 96, p. 282–289, 2016.
- QIAN, Y. H. *Lattice Gas and Lattice Kinetic Theory Applied to the Navier-Stokes Equations*. Tese (Doutorado) — Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1990.
- QIAN, Y. H.; D'HUMIÈRES, D.; LALLEMAND, P. Lattice bgk models for navier-stokes equation. *Europhysics Letters*, v. 17, n. 6, p. 479 – 484, 1992.
- ROCCA, M. L.; ADDUCE, C.; SCIORTINO, G. Development of a lattice boltzmann method for two-layered shallow-water flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 70, p. 1048–1072, 2012.
- ROCCA, M. L.; MONTESSORI, A.; PRESTININZI, P.; SUCCI, S. A multispeed discrete boltzmann model for transcritical 2d shallow water flows. *Journal of Computational Physics*, v. 284, p. 117 – 132, 2015.
- ROSIS, A. D. A central moments-based lattice boltzmann scheme for shallow water equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 319, p. 379–392, 2017.
- ROTHMAN, D. H. *Lattice-Gas Cellular Automata: Simple Models of Complex Hydrodynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- ROTHMAN, D. H.; ZALESKI, S. Lattice-gas models of phase separation: interfaces, phase transitions and multiphase flow. *Review of Modern Physics*, v. 66, p. 1417 – 1479, 1994.
- SCHEPKE, C.; DIVERIO, T. A. Uso do método de lattice de boltzmann em aplicações de hidrodinâmica. In: *6ª Escola de Alto desempenho*. Ijuí, Rio Grande do Sul, Brasil: [s.n.], 2006.
- SEMA, S. de Estado do Meio Ambiente e R. H. *Bacias Hidrográficas do Paraná*. Paraná, Brasil, 2010.
- SEMADE, S. de Estado de Meio Ambiente e D. E. *MATO GROSSO DO SUL (Estado). Instituto de Meio Ambiente de Mato Grosso do Sul - IMASUL. Plano de Recursos Hídricos da Bacia Hidrográfica do Rio Miranda*. Mato Grosso do Sul, Brasil, 2016. 406 p.
- SEMMENS, D. J.; GOODRICH, D. C.; UNKRICH, C. L.; SMITH, R. E.; WOOLHISER, D. A.; MILLER, S. N. *KINEROS2 and the AGWA modelling framework*. [S.l.], 2008.
- SIEBERT, D. N. *Análise de formas discretas da equação de Boltzmann para problemas térmicos Bi-dimensionais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2007.
- SILVEIRA NETO, A. d.; MANSUR, S. S.; SILVESTRINI, J. H. Equações da turbulência: Média versus filtragem. In: *III Escola de Primavera: Transição e Turbulência*. Florianópolis, SC: [s.n.], 2002.

- STEPHENSON, D.; MEADOWNS, M. E. *Kinematic Hidrology and Modelling (Developments in water science)*. Amsterdam: Elsevier, 1986.
- STERLING, J. D.; CHEN, S. Stability analysis of lattice boltzmann methods. *Journal of Computational Physics*, v. 123, p. 196 – 206, 1996.
- SUCCI, S. *The Lattice Boltzmann Equation for Dynamics and Beyond*. New York: Oxford University Press Inc., 2001.
- SUKOP, M. C.; THORNE, D. T. *Lattice Boltzmann Model: An introduction for geoscientists and engineers*. Berlin: Springer, 2006.
- SURMAS, R. *Simulação de fenômenos termo-fluidodinâmicos pelo emprego dos método de diferenças finitas à solução da equação de BoltzBolt*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC., 2010.
- THANG, P. van; CHOPARD, B.; LEFÈVRE, L.; ONDO, D. A.; MENDES, E. Study of the 1d lattice boltzmann shallow water equation and its coupling to build a canal network. *Journal of Computational Physics*, v. 229, n. 19, p. 7373–7400, 2010.
- THOMMES, G.; SEAID, M.; BANDA, M. K. Lattice boltzmann methods for shallow water flow applications. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 55, n. 7, p. 673–692, 2007.
- TUBBS, K. *Lattice Boltzmann Modeling for Shallow Water Equations Using High Performance Computing*. Tese (Doutorado) — Louisiana State University, Luisiana, Estados Unidos, 2010.
- TUCCI, C. E. M. *Modelos Hidrológicos*. Porto Alegre, RS - Brasil: Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1998.
- UDA, P. K. *Evapotranspiração real da bacia do rio Iguaçu por meio do modelo metric*. Tese (Doutorado), 2016.
- WEI, X.; LI, W.; MUELLER, K.; KAUFMAN, A. E. The lattice boltzmann method for gaseous phenomena. In: *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 10, n. 2, p. 164 – 176.
- WOLF, F. G. *Modelagem da Interação Fluido-sólido para Simulação de Molhabilidade e Capilaridade Usando o Modelo Lattice-Boltzmann*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC - Brasil, 2006.
- WOLFRAM, S. *Cellular Automata and Complexity: Collected Papers*. 1994. Disponível em: <<http://www.stephenwolfram.com>>.
- WOOLHIER, D. A.; SMITH, R. E.; GOODRICH, R. E. D. C. *KINEROS, A Kinematic Runoff and Erosion Model: Documentation and User Manual*. [S.l.], 1990. Disponível em: <http://www.tucson.ars.ag.gov/kineros>. Acesso em: 15/11/2016.
- XIONG, W.; ZHANG, J. A two-dimensional lattice boltzmann model for uniform channel flows. *Computers and Mathematics with Applications*, v. 61, p. 3453 – 3460, 2011.
- YULISTIYANTO, B. *Flow around a cylinder installed in a fixed-bed open channel*. Tese (Doutorado) — École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, 1997.

YULISTIYANTO, B.; ZECH, Y.; GRAF, W. H. Flow around a cylinder: Shallow-water modeling with diffusion-dispersion. *Journal of Hydraulic Engineering*, v. 124, n. 4, p. 419–429, 1998.

ZARITA, R.; HACHEMI, M. Microchannel fluid flow and heat transfer by lattice boltzmann method. In: *4th Micro and Nano Flows Conference*. Londres, Inglaterra: [s.n.], 2014.

ZERGANI, S.; AZIZ, Z. A.; VISWANATHAN, K. K. A shallow water model for the propagation of tsunami via lattice boltzmann method. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, v. 23, n. 1, p. 012007, 2015.

ZHANG, C.-z.; Y.-G., C.; WU, J.-Y.; DIAO, W. Lattice boltzmann simulation of the open channel flow connecting two cascaded hydropower stations. *Journal of Hydrodynamics*, v. 28, n. 3, p. 400–410, 2016.

ZHANG, J.; YAN, G. Lattice boltzmann method for one and two-dimensional burgers equation. *Physica A*, 2008.

ZHANG, J.; YAN, G. A lattice boltzmann model for the burgers–fisher equation. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 20, p. 023129, 2010.

ZHANG, X.; FENG, J.; YANG, T. Lattice boltzmann method for overland flow studies and its experimental validation. *Journal of Hydraulic Research*, v. 53, n. 5, p. 561–575, 2015.

ZHANG, X.; FENG, J.; ZHANG, D.; LIU, N. Comparison of lattice boltzmann method and preissmann implicit difference method in application to overland flow. *Nongye Jixie Xuebao/Transactions of the Chinese Society of Agricultural Machinery*, 2014.

ZHAO, Z.; HUANG, P.; LI, Y.; LI, J. A lattice boltzmann method for viscous free surface waves in two dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 71, p. 223 – 248, 2013.

ZHAO, Z.-m.; HUANG, P.; LI, S.-t. Lattice boltzmann model for shallow water in curvilinear coordinate grid. *Journal of Hydrodynamics*, v. 29, n. 2, p. 251–260, 2017.

ZHOU, J. G. A lattice boltzmann model for the shallow water equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, p. 3527 – 3539, 2002.

ZHOU, J. G. *Lattice Boltzmann Method for Shallow Water Flows*. New York: Springer, 2004.

ZHOU, J. G.; LIU, H.; SHAFIAI, S.; PENG, Y.; BURROWS, R. Lattice boltzmann method for open-channel flows. *Engineering and Computational Mechanics*, v. 163, p. 243 – 249, 2010.

ZOU, Q.; HE, X. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice boltzmann bgk model. *Physics of Fluids*, v. 9(6), p. 1591 – 1598, 1997.

GLOSSÁRIO

EXPANSÃO CHAPMAN-ENSKOG: Esta expansão baseia-se fundamentalmente em dividir os fenômenos difusivos e convectivos nas respectivas escalas de tempo, e agrupar os termos separadamente. A expansão de Chapman-Enskog é utilizada no LBM para derivar as equações macroscópicas e para correlacionar os parâmetros do modelo.

EXPANSÃO MULTIESCALA: Para relacionar a equação do reticulado de Boltzmann com alguma equação diferencial parcial é necessário separar formalmente escalas de tempo diferentes. Desta forma os fenômenos físicos que acontecem nas diferentes escalas são discutidos separadamente, contribuindo individualmente para as equações de movimento finais.

FORÇA DE CORPO: É uma força que atua no volume de um corpo. Na mecânica dos fluidos forças de volume são uma parte das equações de Navier-Stokes, descrevendo a influência de forças externas.

NÚMERO DE FROUDE: Representa razão entre velocidade das partículas e velocidade das ondas. O Número de Froude desempenha importante papel no estudo dos canais, permitindo definir os regimes de escoamento (Subcrítico, Transcrítico e Supercrítico).

NÚMERO DE KNUDSEN: É uma medida adimensional definido como a razão entre o comprimento do caminho livre médio molecular e uma escala de comprimento fisicamente representativa.

NÚMERO DE REYNOLDS: O coeficiente, número ou módulo de Reynolds é um número adimensional usado em Mecânica dos Fluidos para o cálculo do regime de escoamento de determinado fluido sobre uma superfície.

APÊNDICE A – SUB-ROTINAS DE COLISÃO E PROPAGAÇÃO

```

1  subroutine collide (nx,tau,dt,gAlfa,f,feq,fC)
2
3  integer , intent(in)           :: nx
4  double precision , intent(in)   :: tau,dt,gAlfa,f(0:4,0:nx),feq(0:4,0:nx)
5  double precision , intent(inout) :: fC(0:4,0:nx)
6  integer                        :: i
7
8  do i = 0, nx
9      fC(0,i) = f(0,i) - (f(0,i)-feq(0,i))/tau + dt*dt*gAlfa
10     fC(1,i) = f(1,i) - (f(1,i)-feq(1,i))/tau + dt*dt*gAlfa
11     fC(2,i) = f(2,i) - (f(2,i)-feq(2,i))/tau + dt*dt*gAlfa
12     fC(3,i) = f(3,i) - (f(3,i)-feq(3,i))/tau + dt*dt*gAlfa
13     fC(4,i) = f(4,i) - (f(4,i)-feq(4,i))/tau + dt*dt*gAlfa
14 end do
15
16 return
17 end subroutine collide

```

```

1  subroutine stream (nx,ftemp,fold,fC)
2
3  integer , intent(in)           :: nx
4  double precision , intent(in)   :: fC(0:4,0:nx)
5  double precision , intent(inout) :: ftemp(0:4,0:nx), fold(0:4,0:nx)
6  double precision                :: tmp, tmp2
7
8  fold(:, :) = fC(:, :)
9
10 ftemp(0, :) = fC(0, :)
11
12 tmp = fC(1,0)
13 ftemp(1,0:nx-1) = fC(1,1:nx)
14 ftemp(1,nx) = tmp
15
16 tmp = fC(3,nx)
17 ftemp(3,1:nx) = fC(3,0:nx-1)
18 ftemp(3,0) = tmp
19
20 tmp = fC(2,0)
21 tmp2 = fC(2,1)
22 ftemp(2,0:nx-2) = fC(2,2:nx)
23 ftemp(2,nx-1) = tmp
24 ftemp(2,nx) = tmp2
25

```

```
26 tmp  = fC(4,nx)
27 tmp2 = fC(4,nx-1)
28 ftemp(4,2:nx) = fC(4,0:nx-2)
29 ftemp(4,1) = tmp
30 ftemp(4,0) = tmp2
31
32 return
33 end subroutine stream
```

APÊNDICE B – ARTIGOS DESENVOLVIDOS

A seguir são listados os artigos completos aceitos em periódicos.

1. **GALINA, V.**; CARGNELUTTI, J.; KAVISKI, E.; GRAMANI, L. M.; LOBEIRO, A. M. Application of lattice Boltzmann method for surface runoff in watershed. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, 2017 (to appear);
2. CARGNELUTTI, J.; **GALINA, V.**; KAVISKI, E.; GRAMANI, L. M.; LOBEIRO, A. M. Simulation of the two-dimensional flow of the initiation channel of the itaipu hydroelectric power plant by the lattice Boltzmann method. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, 2017 (to appear);
3. CARGNELUTTI, J.; **GALINA, V.**; KAVISKI, E.; GRAMANI, L. M.; LOBEIRO, A. M. Two-dimensional Numerical Simulation of Channel Flow with Submerged Obstacles using the Lattice Boltzmann Method. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, 2017 (to appear).

Lista-se a seguir os artigos publicados em congressos e simpósios.

1. **GALINA, V.**; CARGNELUTTI, J.; KAVISKI, E.; GRAMANI, L. M.; LOBEIRO, A. M. . Simulação de escoamento de agua em canal entre placas paralelas utilizando o método do reticulado de Boltzmann. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2016, Gramado - RS. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, 2016;
2. **GALINA, V.**; CARGNELUTTI, J.; KAVISKI, E.; GRAMANI, L. M.; LOBEIRO, A. M. Simulação de onda de maré por meio do Método do Reticulado de Boltzmann. In: I Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia, 2016, Curitiba - PR. Anais do I Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia, 2016;
3. CARGNELUTTI, J.; **GALINA, V.** ; KAVISKI, E. ; GRAMANI, L. M. ; LOBEIRO, A. M. . Escoamento de Poiseuille Utilizando o Método do Reticulado de Boltzmann. In: V Simpósio de Métodos Numéricos Computacionais - SMNC, 2015, Curitiba - PR. Anais do V Simpósio de Métodos Numéricos Computacionais, 2015.

ANEXO A – PRECIPITAÇÃO E VAZÃO INICIAL NA BACIA RIO CHOPIM

Tabela 17 – Intensidade média de precipitação no rio Chopim, mês 07/1987

Sub-bacia	Plano	07/07/1987 (m/h) $\times 10^{-3}$		08/07/1987 (m/h) $\times 10^{-3}$	
		7h	19h	7h	19h
1	pd	-	-	-	-
	pe	0	0	1,47400098	0,00174585
2	pd	0	0,65031194	2,24260054	0,00242411
	pe	0	0	1,47400098	0,00174585
3	pd	0	0	1,67223974	0
	pe	0	0	1,47400098	0,00174585
4	pd	0	0	0,87767508	0
	pe	0	0	1,15756772	0
5	pd	0	0	0,87767508	0
	pe	0	0	0,99927618	0
6	pd	0	0	0,87767508	0
	pe	0	0	0,99927618	0
7	pd	0	0	0,90541231	0
	pe	0	0	1,15131540	0
8	pd	0	0	1,08201453	0
	pe	0	0	1,26797648	0,00923398
9	pd	0	0,72930031	1,47131551	0,02406490
	pe	0	0	1,26797648	0,00923398

Fonte: Kaviski e Gonçalves (1996).

Tabela 18 – Vazões iniciais e coeficientes de interpolação da vazão nos trechos de canais do rio Chopim, mês 07/1987

Canal	Vazão inicial na seção transversal (m ³ /s)		Coeficientes da interpolação linear $Q(x) = ax + b$		Vazão inicial como contribuição lateral (m ² /s) $\times 10^{-4}$
	Montante	Jusante	$a \times 10^{-4}$	b	
1	0	4,91134977	1,83054408	0	1,83054408
2	4,91134977	17,46209717	2,64226261	4,91134977	2,64226261
3	17,46209717	25,61030197	2,70076394	17,46209717	2,70076394
4	25,61030197	34,05889511	3,17855272	25,61030197	3,17855272
5	34,05889511	44,58636093	2,52638969	34,05889510	2,52638969
6	44,58636093	48,07283783	2,68190530	44,58636093	2,68190530
7	48,07283783	75,09886169	4,15784983	48,07283783	4,15784983
8	75,09886169	84,33335876	4,19749867	75,09886168	4,19749867
9	84,33335876	86,98714447	3,24423681	84,33335877	3,24423681

Fonte: Kaviski e Gonçalves (1996).